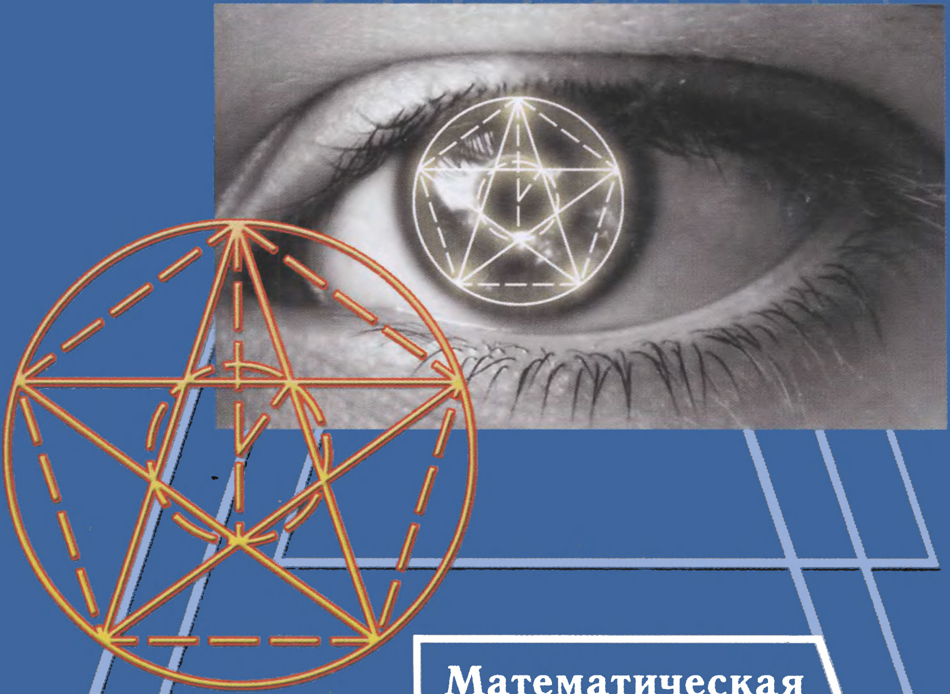
Г. Е. Тимердинг

ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ



Математическая теория

Эстетическое значение

URSS

H. E. Timerding

DER GOLDENE SCHNITT

Г. Е. Тимердинг

ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ

Перевод с немецкого
В. Г. Резвой

Под редакцией
Г. М. Фихтенгольца

Издание третье,
дополненное

URSS
МОСКВА

ББК 22.130о 22.151 85.1 87.8

Тимердинг Генрих Е.

Золотое сечение: Пер. с нем. / Под ред. Г. М. Фихтенгольца. Изд. 3-е, доп. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. — 112 с.

В книге немецкого ученого Г. Е. Тимердинга, профессора высшей технической школы в Брауншвейге, рассматривается золотое сечение — как с точки зрения математики, так и с точки зрения эстетики. В первой части книги изложены в связной и законченной форме те соображения из области элементарной математики, которые относятся к золотому сечению. Во второй части подвергнуто критическому исследованию то значение, которое имеет золотое сечение в эстетике. Первое издание на русском языке вышло в 1924 году, но вопросы, поднятые в книге, не оставят равнодушными и современных читателей.

Изложенный материал предполагает самые элементарные математические познания, и поэтому книга рекомендуется школьникам, студентам, педагогам и всем, кто интересуется вопросами математики и эстетики.

Издательство «Книжный дом "ЛИБРОКОМ"».
117312, г. Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, д 9
Формат 60×90/16 Тираж 1000 экз Печ. л. 7 Зак № 1895

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД».
117312, г. Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, д 11А, стр. 11

ISBN 978-5-397-00006-2

5266 ID 60343
9 785397 000062

Содержание

Предисловие

Эта непритязательная маленькая книга не требует длинного предисловия. Она имеет целью изложить в связной и законченной форме те соображения из области элементарной математики, которые относятся к золотому делению, так как при школьном преподавании этого обыкновенно не делается. При этом предполагаются только самые элементарные математические познания, приблизительно такие, каких достигают ученики третьего класса (Tertia), так что даже мало подготовленный читатель не встретит никаких затруднений. Во второй части подвергнуто критическому исследованию то значение, которое имеет золотое деление в эстетике. Это исследование по возможности сокращено, чтобы не увеличить чрезмерно размеров книги. Возможно, что в некоторых местах будет ощущаться необходимость в более подробном рассмотрении некоторых областей искусства и природы, а также будет казаться, что недостаточно приняты во внимание новейшие работы из области экспериментальной эстетики. Но моей целью было рассмотреть эти вопросы только настолько подробно, чтобы стала ясна та роль, которую играет пропорция золотого деления в эстетике, а не затрагивать общего вопроса о роли пропорций в эстетике. Приводимые попутно литературные указания помогут читателю в дальнейшем изучении вопроса.

Брауншвейг, ноябрь, 1918 г. *H. E. Timerding*

Введение

Золотое деление представляет очень простую, но с давних пор широко известную главу элементарной геометрии. Оно занимает прочное место в школьном преподавании, но при этом его основная сущность и то особое значение, которое ему приписывают, по большей части недостаточно разъясняются. Причина этого заключается в том, что при изложении геометрии руководствуются, главным образом, основным трудом Эвклида, а в его сочинении те точки зрения, которые привели первоначально к золотому делению, в угоду логической последовательности, почти отброшены. Чтобы разъяснить эти точки зрения, необходимо изложить вопрос о золотом делении отдельно. Такие отдельные изложения уже имеются, но они недостаточно доступны, и в них недостаточно отчетливо изложено как раз то, что служит к разъяснению сущности и значения золотого деления.

В основе такого рода исследований редко лежит интерес чисто геометрический. По большей части с ними связываются побочные идеи, а именно мысль о том, что золотое деление может дать объяснение тому эстетическому впечатлению, которое производят некоторые образы, и даже объяснение природы красоты вообще, поскольку это касается зрительных образов. Попытки дать такое объяснение начались в глубокой древности и не прекращаются до настоящего времени. Даже при кратком изложении золотого деления этот вопрос едва ли может быть обойден. Каждый, кто хотя бы что-нибудь услышит о золотом делении, захочет узнать, какое это имеет отношение к его пресловутому эстетическому значению. Без сомнения, тот ответ, который мы теперь можем дать на этот вопрос, не оправдает многих надежд на возможность простого объяснения эстетического впечатления от геометрических соотношений сведением их к золотому делению. Но и этот отрицательный вывод не лишен значения. Некоторое разъяснение природы красоты зрительных образов при этом все-таки будет достигнуто.

Вообще говоря, появление мысли о том, чтобы выделить отношения, которые наиболее способны производить эстетическое впечатление, объясняется тем, что гармония в музыке действительно может быть сведена к такого рода отношениям. Совершенно естественным кажется допустить, что то, что справедливо по отношению к уху, верно и для глаза, что подобно тому как приятное впечатление производят те звуки, у которых число колебаний находится в определенных отношениях, и глаз получит удовольствие от определенных отношений в пространственных измерениях. Мысль о том, что в основе гармонии музыки лежит число, исходит, как известно, от пифагорейцев, и, вероятно, именно от самого основателя этой школы. Поэтому наперед представляется весьма вероятным, что попытки аналогично объяснить гармонию пространственных образов исходят тоже от этой школы. Так оно и было в действительности. Но насколько просто и ясно объяснение пифагорейцев музыкальной гармонии числовыми соотношениями, настолько трудно найти исчерпывающие указания для развития аналогичного объяснения гармонии пространственных образов. Положение вещей в этом случае гораздо более запутано, и, если мы не погрузимся в кропотливое историческое исследование со всем тем невыясненным и спорным, что с ним связано, мы должны будем ограничиться тем, что проследим некоторый ход мыслей, который до известной степени вероятно соответствует историческому развитию, не имея, однако, возможности утверждать с уверенностью, что историческое развитие шло именно по этому пути.

Объяснение звуковой гармонии простыми числовыми соотношениями стоит в тесной связи с учением пифагорейцев о числе. Пифагорейцы учили, что число есть основа и сущность всякого бытия, и подтверждение этого находили в том, что звуковая гармония связана с определенными числовыми соотношениями.

Сознание этой связи привело их к тому, чтобы, кроме натуральных чисел, рассматривать еще и дробные, которые они сделали предметом изучения особой отрасли науки. Эта наука называется логистикой. Слово логистика происходит от греческого слова λόγος, которое, согласно особой пифагорейской терминологии, означало арифметическое отношение, и переносный смысл которого получил, как известно, такое широкое значение. Так как звуковая гармония покоится на определенных численных значениях отношений, со словом λόγος непосредственно связывается понятие о гармонии. Гармония в ее первоначальном смысле, как ее понимали пифагорейцы, не заключалась только в музыкальных звуках, но, разумея под гармонией стройность и порядок, они распространяли ее на всю совокупность реально существующего. В строении вселенной, в расположении и движении светил находили они ту самую гармонию, которая заключается в красивом звуке. Это и есть знаменитая гармония сфер. Так как λόγος, означает причину гармонии, он заключает в себе источник красоты и стройности вселенной; коротко говоря – то, что пифагорейцы называли словом κόσμος.

До сих пор мысли пифагорейцев нам достаточно ясны и понятны. Затруднения встретятся тогда, когда мы коснемся основоначал геометрии и вместе с тем сущности пространственного расположения. Пифагор изучал геометрию попутно с арифметикой и, видимо, с одинаковой любовью. При этом, однако, он пришел к тому выводу, что арифметика и геометрия в своих основных понятиях глубоко различны. Это различие заключается в природе иррационального. Открытие иррациональности – одно из величайших завоеваний человеческого духа. Предполагают, что Пифагор сделал это открытие при изучении диагонали квадрата. Он-нашел, может-быть, к своему величайшему удивлению, что сторона и диагональ квадрата находятся в таком отношении, которое не может быть выражено ни одним числом. Это обстоятельство он выразил словом «ἄλογος», что означает – без отношения, а по-латыни оно было переведено словом «irrationalis», которое происходит от слова «ratio» – отношение.

О том, как Пифагор справился с этим необыкновенным обстоятельством, мы можем делать одни только предположения. По-видимому, на этом основано его особое воззрение на природу геометрических величин. В этом воззрении содержится определенное понимание понятия о бесконечном. Пифагор объяснял иррациональность отношения стороны и диагонали квадрата тем, что оба эти отрезка не состоят, подобно числам, из определенного конечного числа частей или единиц, а элементами, из которых они строятся, служат содержащиеся в них точки. Эти точки существуют, однако, не в конечном числе, исчисление их превосходит все человеческие возможности, короче сказать — число их бесконечно. Иррациональное отношение сводится таким образом к отношению двух бесконечно больших чисел, которое не может быть выражено отношением двух конечных чисел. В действительности, иррациональное отношение может быть выражено как угодно точно отношением двух конечных чисел, стоит лишь выбрать эти числа достаточно большими, а эта мысль уже очень близка к заключению, что иррациональные числа могли бы быть и точно выражены, если бы имелись в распоряжении бесконечно большие числа.

Во всяком случае, представление о линии как о совокупности ее точек есть шаг вперед по этому пути; основные свойства геометрических величин теперь связываются с определенной идеей, которая не поддается чувственному восприятию и не может быть объяснена. Это, однако, не служило препятствием для пифагорейцев в признании этой идеи, так же как и для Джордано Бруно (Giordano Bruno), Галилея (Galilei) и Кавальери (Cavalieri), которыми она была снова принята в семнадцатом столетии нашей эры. Наоборот, пифагорейцы думали, что, идя по этому пути, они раскроют самую сущность пространственного мира. Им казалось, что таким образом можно объяснить, почему явления и соотношения в той действительности, которая познается опытом, гораздо более сложны и запутаны, чем те простые гармонии, которые они находили в числах и которые составляли для них своего рода высший мир и высшую действительность. Ясные и поддающиеся представлению числовые соотношения заключают в себе божественный порядок и незыблемость; в соотношениях же пространственных и временных протяжений, которые могут быть иной раз точно выражены, а иной раз только приближенно, обнаруживается неполное совершенство действительности; в них содержится, рядом с признаками порядка и разумности, нечто, не поддающееся разъяснению и поэтому несовершенное, неразумное, «иррациональное».

Если божественная гармония все же находит себе, хотя бы частичное, отражение в окружающей несовершенной действительности, то это может проявиться лишь в том, что мы ощущаем в вещах известные гармонические соотношения. Чтобы эти соотношения найти, мы должны искать такие фигуры, которые на нас производят впечатление наибольшего совершенства. Такими фигурами являются правильные фигуры. Но эти фигуры двоякого рода — пространственные и плоские. Греки имели сведения, по всей вероятности полученные ими с востока, об обоего рода фигурах. Во всяком случае Пифагору они были уже известны. Между обоего рода фигурами существует следующее замечательное различие. В плоскости существует бесчисленное множество правильных многоугольников, а именно с любым числом сторон, начиная с трех; что касается пространства, то оказывается, что правильных многогранников имеется только ограниченное число, а именно пять так называемых тел Платона, Платон вынес их за пределы пифагорейской школы, рассмотрев их в своем «Тимее», и считал их основанием развития пространственной действительности, в частности четырех земных элементов и пятого надземного.

Как раз эти пять тел, грани которых суть правильные трех-, четырех- и пятиугольники, послужили основанием особому изучению этих простейших многоугольников. Правильный треугольник считался вавилонянами основной фигурой; правильный четырехугольник, иначе квадрат, представляется как первая фигура при всяком геометрическом рассмотрении и встречается уже у египтян на каждом шагу. Правильный пятиугольник сравнительно не так легко получить, но тем более удивительными кажутся его свойства, когда он открыт. Этим объясняется то, что у пифагорейцев как раз с правильным пятиугольником была связана мысль о таинственных силах и свойствах. Но эти свойства обнаруживаются лишь тогда, когда рядом с обыкновенным правильным пятиугольником будет рассмотрена та звезда, которая получается при последовательном соединении через одну всех вершин обыкновенного пятиугольника, иными словами фигура, составленная диагоналями пятиугольника. Это так называемая пентаграмма, которая играла большую роль во всех магических науках до последнего времени, и теперь еще во многих местностях употребляется народом в виде «ведьминой стопы» (Drudenfuss), как средство защиты от злых духов, в частности, для охраны спящего от ведьм и от производимого ими кошмара. Вспоминается место из гетевского «Фауста» [1)], где Мефистофель был лишен возможности выйти из комнаты Фауста благодаря пентаграмме, расположенной на пороге так, что одна из вершин была направлена внутрь комнаты, а вершина противоположного вогнутого угла, вследствие несовершенства чертежа, содержала маленькое отверстие, так что дух мог только войти в комнату, а выйти никак не мог:

[1)] Приведем это место в переводе Н. Холодковского:

Мефистофель. Нет, трудновато выйти мне теперь.
Тут кое-что мешает мне немного:
Волшебный знак у вашего порога.

Фауст. Не пентаграмма-ль этому виной?
Но как же, бес, пробрался ты за мной?
Каким путем впросак попался?

Мефистофель. Изволили ее вы плохо начертить,
И промежуток в уголку остался,
Там, у дверей — и я свободно мог вскочить.

— *Прим. ред.*

«Dass ich hinausspaziere
Verbietet mir ein kleines Hindernis,
Der Drudenfuss auf Eurer Schwelle».

После того, как Мефистофель усыпил Фауста, который не хотел его выпустить, послушные ему мыши и крысы должны были прогрызть вершину неприкосновенной для него пентаграммы.

По какой причине пентаграмме приписывали такую чудодейственную силу, мы лучше всего поймем, если рассмотрим ее действительные геометрические свойства. Эти свойства приведут нас к золотому делению, и такой подход к нему нам кажется наиболее простым, естественным и наглядным. Подход Эвклида к делению отрезка золотым сечением не дает возможности судить о том, как пришли к постановке именно этой задачи. Это делается понятным только при рассмотрении правильного пятиугольника или десятиугольника, если бы при этом проследить естественный ход развития мыслей, начиная от самого построения этих фигур. Именно это мы в последующем прежде всего и попытаемся сделать.

Часть 1

Математическая теория золотого сечения

Мы будем исходить из того, что окружность круга разделена на пять частей. Эта задача практически разрешима без знания теоретического способа, и это соответствует ходу исторического развития, так как первое построение несомненно было сделано именно так. Тот факт, что радиус круга шесть раз укладывается на окружности, был одной из ранее всего известных геометрических истин. Если мы раздвинем ножки циркуля на расстояние немного большее, чем радиус, приблизительно такое, чтобы оно пять раз отложилось на окружности, а затем полученный остаток опять разделим приблизительно на пять частей, то мы быстро этим способом разделим окружность на пять равных частей.

Предположив, что это сделано, соединим пять подряд лежащих на окружности точек деления A, B, C, D, E, как мы уже упоминали, двумя различными способами: во-первых, каждую из точек деления соединим с непосредственно следующей за ней, во-вторых, последовательно соединим каждую точку с точкой, лежащей через одну (рис. 1). Первая операция дает нам обыкновенный выпуклый пятиугольник, вторая – звездчатый пятиугольник или пентаграмму. Каждая сторона пентаграммы пересекается двумя другими. Точки пересече-

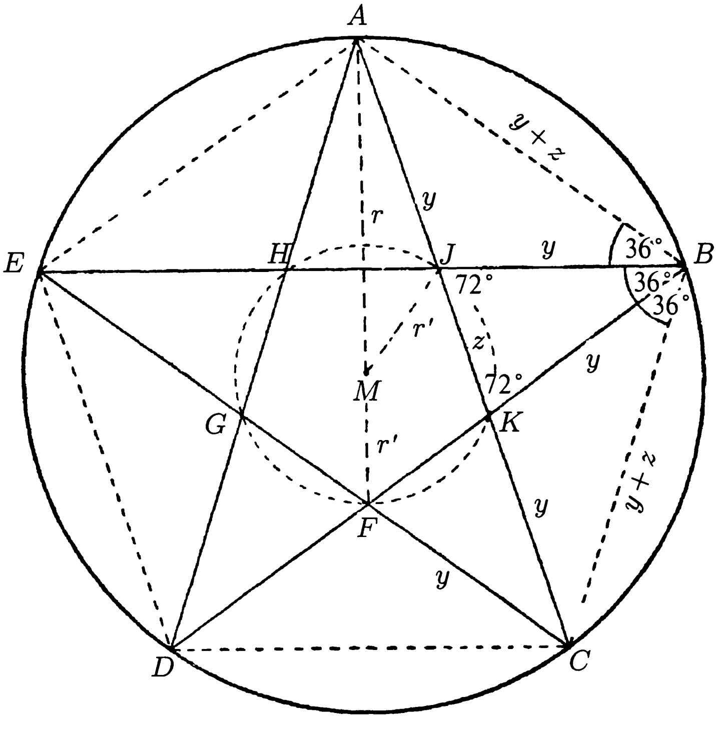


Рис. 1

ния опять составляют совокупность вершин правильного пятиугольника $FGHJK$, стороны которого лежат на сторонах пентаграммы. Рассмотрим для примера четыре точки A, G, K, C, лежащие на стороне AC. Непосредственно ясно, что расстояние AJ и KC равны. Их общую величину обозначим буквой y. Расстояние JK обозначим буквой z. Величины соответствующих отрезков на других сторонах очевидно те же, например: отрезки BJ и BK оба равны y. Таким образом, треугольник JBK – равнобедренный. Угол этого треугольника при вершине B – вписанный и опирается на дугу, равную одной пятой окружности. Отсюда следует что этот угол равен одной пятой 180° или 36°.

Углы J и K равны друг другу, поэтому каждый равен 72° т. е. удвоенному углу B. Таким образом, у рассматриваемого равнобедренного треугольника углы при основании вдвое больше угла при вершине. В этом треугольнике боковые стороны BJ и BK равны y, а основание JK равно z.

Таким образом, y и z обозначают боковую сторону и основание равнобедренного треугольника, в котором угол при основании вдвое больше угла при вершине.

Рассмотрим теперь треугольник BAK. В нем угол K нам уже встречался, он равен 72°. Угол при A опять-таки есть угол вписанный, опирающийся на дугу, равную одной пятой окружности, и, следовательно, равен 36°. Угол при B равен 72°, как вписанный и опирающийся на дугу DEA, равную двум пятым окружности. Отсюда следует, что этот треугольник подобен ранее рассмотренному и также является равнобедренным. Так как его боковая сторона AK равна $y + z$, то его другая боковая сторона AB, т. е. сторона выпуклого пятиугольника $ABCDE$, тоже равна $y + z$.

Наконец, рассмотрим треугольник ADB; он тоже равнобедренный и угол при его вершине равен 36°. Отсюда следует, что он подобен предыдущим треугольникам, а так как его боковая сторона равна $2y+z$, а основание равно $y + z$, то, сопоставляя эти три треугольника, мы получим следующие пропорции

$$\frac{y+z}{2y+z} = \frac{y}{y+z} = \frac{z}{y}. \tag{1}$$

Общую величину этих трех дробей обозначим буквой x.

Принимая во внимание вторую из этих пропорций, мы видим, что отрезок

$$AK = y + z$$

делится точкой J на две части (рис. 2) таким образом, что

> *весь отрезок относится к большей части, как бóльшая часть – к меньшей.*

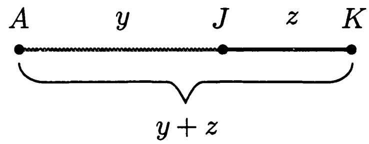


Рис. 2

Это деление и названо *золотым сечением* или иначе непрерывным делением[1].

В последующем мы найдем способ его осуществления.

Далее, пропорции (1) показывают, что сторона выпуклого пятиугольника, равная $y + z$, относится к стороне звездчатого пятиугольника, равной $2y + z$, как y, т. е. большая часть золотым сечением разделенного отрезка $AK = y + z$ относится ко всему отрезку, или как меньшая часть z относится к большей y.

Легко также усмотреть, что если мы впишем в круг радиуса y правильный десятиугольник, длина стороны его будет равна z (рис. 3).

Действительно, если мы соединим концы A, B стороны этого десятиугольника с центром круга M, то получим равнобедренный треугольник AMB, у которого угол при вершине равен одной десятой части 360°, т. е. 36°. Так как боковые стороны полученного равнобедренного треугольника равны y, а угол, заклю-

[1] В виду того что пропорция, о которой только что шла речь, является *непрерывной*. — *Прим. ред.*

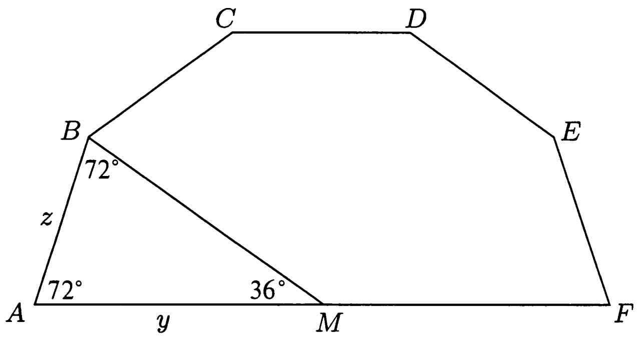


Рис. 3

ченный между ними, равен 36°, то этот треугольник равен ранее рассмотренному треугольнику JBK, и, таким образом, сторона AB равна прежнему z. Отсюда следует, что *отношение стороны пятиугольника к радиусу равно*

$$\frac{z}{y} = x.$$

Для отыскания зависимости между радиусом r круга, описанного около пятиугольника $ABCDE$ (рис. 1), и стороной пятиугольника, заметим прежде всего, что радиус r' круга, описанного около пятиугольника $FGHJK$, относится к r, как длина стороны пятиугольника $FGHJK$ относится к длине стороны пятиугольника $ABCDE$, т. е. как JK к AB, и, следовательно, как z к $y + z$. Вместе с тем, на основании установленных выше пропорций (1)

$$\frac{z}{y} = x \quad \text{и} \quad \frac{y}{y+z} = x,$$

а умножение этих двух равенств дает:

$$\frac{z}{y+z}=x^2.$$

И таким образом имеем

$$\frac{r'}{r}=x^2. \qquad (2)$$

Если мы проведем теперь прямую AF и, кроме того, соединим расположенный на этой прямой центр круга M с точкой J, то получим два треугольника AFC и AJM, которые подобны, так как у них угол при A (равный 18°) — общий, а угол ACF так же, как и угол AMJ равен 36°. Отсюда следует, что

$$\frac{AF}{AC}=\frac{AJ}{AM}$$

или, если мы заменим отрезки их величинами и заметим, что

$$AF=AM+FM=r+r',$$

будем иметь:

$$\frac{r+r'}{2y+z}=\frac{y}{r}.$$

Отсюда получаем

$$r(r+r')=y(2y+z)$$

или, если мы r' заменим его выражением, найденным из (2),

$$r^2(1+x^2)=y(2y+z).$$

Для правой части этого равенства из пропорции

$$\frac{y+z}{2y+z}=\frac{y}{y+z}$$

непосредственно получаем следующее соотношение:

$$y(2y+z)=(y+z)^2.$$

Таким образом, окончательно мы приходим к равенству

$$r^2+r^2x^2=(y+z)^2. \qquad (3)$$

Это равенство, однако, имеет очень простое геометрическое значение. r является одновременно радиусом круга, описанного около пятиугольника $ABCDE$, и длиной стороны вписанного в этот круг правильного шестиугольника. Длина стороны правильного десятиугольника, вписанного в этот круг, равна rx. Наконец, $y+z$ есть длина стороны правильного выпуклого вписанного пятиугольника. Таким образом, в силу равенства (3), квадраты длин сторон шестиугольника и десятиугольника в сумме равны квадрату длины стороны пятиугольника. Но на основании теоремы Пифагора это имеет следующее значение:

стороны пятиугольника, шестиугольника и десятиугольника могут служить сторонами прямоугольного треугольника, в котором сторона пятиугольника есть гипотенуза.

Это прекрасное соотношение по всей вероятности было найдено греческим математиком Евдоксом (Eudoxos) и привело к очень плодотворным результатам.

Теперь нам остается только найти простое геометрическое построение для производства золотого сечения. С этой целью будем исходить из пропорции (1). Обозначив через и весь отрезок AK, разделенный золотым сечением на части y и z, мы можем вторую часть этой пропорции написать в таком виде:

$$\frac{y}{u} = \frac{z}{y}, \quad \text{или} \quad \frac{y}{u} = \frac{u-y}{y},$$

или так:

$$y^2 = (u-y)u.$$

Отсюда окончательно находим:

$$y(u+y) = u^2. \tag{4}$$

Из этого соотношения непосредственно выводится геометрическое построение, приводящее к непрерывному делению отрезка $AB = u$ (рис. 4). Оно выражает, что площадь прямоугольника, высотой и основанием которого служат большая часть y и весь отрезок AB, увеличенный на большую часть, равна u^2, т. е. равна площади квадрата $ABCD$, построенного на всем отрезке $AB = u$. Это означает, что сторона квадрата BC служит высотой прямоугольного треугольника ECF, у которого отрезки гипотенузы, отсекаемые высотой, суть $EB = u+y$ и $BF = y$, и по теореме Фалеса

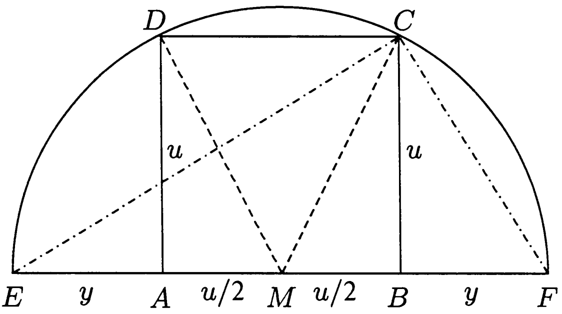


Рис. 4

Милетского (Thales) вершина этого треугольника C лежит на окружности круга, диаметром которого служит отрезок EF. Но центр этого круга M совпадает с серединой отрезка AB, так как $BF = y$, и отрезок той же длины $AE = y$ отложен от точки A по другую сторону отрезка AB. Поэтому центр M круга, если отрезок AB задан, находится непосредственно, а радиус круга, равный расстоянию MC, тоже непосредственно находится восставлением к AB из точки B перпендикуляра $BC = AB$.

Найденное построение, в виде геометрического предложения, может быть выражено следующими словами:

Если в полуокружность диаметра EF вписан квадрат $ABCD$ так, что его сторона AB лежит на диаметре EF, соединяющем концы этой полуокружности, то *отношение равных друг другу отрезков EA и BF к AB есть отношение золотого сечения.*

Построение дает еще больше. По теореме Евдокса, если мы в круг радиуса u впишем правильный десятиугольник и правильный выпуклый пятиугольник, то сторона последнего представляет из себя гипотенузу прямоугольного треугольника, один из катетов которого равен радиусу u, а другой катет равен стороне десятиугольника, следовательно, большей части золотым сечением разделенного отрезка, т. е. равен y. Отсюда непосредственно усматривается, что такой треугольник определяется точками CBF, и что таким образом

CF есть сторона правильного выпуклого пятиугольника, вписанного в круг радиуса u.

В свою очередь, отношение этой стороны к стороне соответствующего звездчатого пятиугольника есть отношение золотого сечения. Но в то же время отношение CF и другого катета прямоугольного треугольника ECF есть тоже отношение золотого сечения. Действительно, ведь

$$\frac{CF}{CE} = \frac{BF}{BC} = \frac{y}{u}.$$

Поэтому

> *CE есть сторона правильного звездчатого пятиугольника, вписанного в круг радиуса u.*

Этим заканчивается в основных чертах геометрическое рассмотрение золотого сечения. Мы не будем вдаваться в рассмотрение весьма замечательного появления его в правильных многогранниках. Вместо этого рассмотрим золотое сечение с арифметической точки зрения более подробно. С этой целью преобразуем вышеприведенное равенство (4) делением обеих частей на u^2. При этом получаем

$$\frac{y}{u}\left(1+\frac{y}{u}\right)=1.$$

Вместе с тем, так как

$$\frac{y}{u}=x$$

есть отношение золотого сечения, для этого отношения находим уравнение

$$x(1+x)=1, \tag{5}$$

или

$$x^2+x=1. \tag{6}$$

Этому уравнению можно, если угодно, придать форму

$$1-x=x^2. \tag{7}$$

Если отрезок, подлежащий делению золотым сечением, равен единице, большая часть его равна x. Если эту часть, в свою очередь, разделить золотым сечением, то большая часть этого отрезка будет равна x^2. Уравнение (7) выражает, что эта часть x^2 есть не что иное, как меньшая часть первоначального отрезка, полученная при первом делении.

Если уравнению (5) придать форму:

$$1 + x = \frac{1}{x}, \tag{8}$$

то оно выражает следующее: если ко всему отрезку прибавить его большую часть, то полученный таким образом отрезок относится к первоначальному отрезку, как последний относится к своей большей части x.

Таким образом, ясно, что все степени x можно получить простым сложением и вычитанием получающихся при делении отрезков. Например, x^3 получается вычитанием меньшей части – x^2 из большей части – x. Действительно, уравнение (7) умножением обеих частей на x преобразуется в следующее:

$$x - x^2 = x^3.$$

При дальнейшем арифметическом рассмотрении золотого сечения лучше всего исходить из квадратного уравнения (6). В сущности, алгебраическое решение этого уравнения уже заключается в геометрическом построении числа x. Оно получается прибавлением к обеим частям данного уравнения дроби $\frac{1}{4}$. Тогда выражение, стоящее в левой части, $x^2+x+\frac{1}{4}$ будет полным квадратом, а именно квадратом двучлена $x+\frac{1}{2}$, и уравнение принимает вид

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}.$$

Если извлечь квадратный корень из правой и левой частей этого уравнения, то получится

$$x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

При этом в правой части следует взять положительное значение корня, потому что число x, а вместе с ним и число $x+\frac{1}{2}$ очевидно имеет положительное значение.

Таким образом, окончательно получаем для x значение

$$x=\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2},$$

или

$$x=\sqrt{1{,}25}-0{,}5. \qquad (9)$$

Так как $\sqrt{1{,}25}$ есть число иррациональное, то значение x есть тоже число иррациональное, т. е. такое, которое не может быть выражено никакой дробью. Квадратный корень, входящий в состав этого выражения, с очень большой степенью точности выражается числом 1,118 (следующие десятичные знаки будут 03), поэтому, во всяком случае с достаточной точностью, имеем

$$x = 0{,}618. \tag{10}$$

Для проверки подставим это значение в уравнение (7). Тогда

$$x^2 = 0{,}3819$$

и

$$1 - x = 0{,}3820,$$

так что значения обеих частей уравнения (7) почти точно совпадают.

Приведенное алгебраическое решение основного уравнения (6) по способу, обыкновенно применяемому при решении квадратных уравнений, не имеет большого значения. Гораздо большее значение имеет разыскание определенных рациональных приближенных значений для x, т. е. нахождение определенных правильных дробей, которые, будучи подставлены вместо x в уравнение, приближенно ему удовлетворяют. С этой целью из уравнения (5) непосредственно выводим уравнение

$$x = \frac{1}{1+x}. \tag{11}$$

Это наводит на мысль, если найдено для x приближенное значение x_0, подставить его вместо x только в правую часть. Тогда в левой части мы не получим, как в том случае, если бы x_0 было точным решением, того же значения x_0, а некоторое отличающееся от него значение x_1, так что получается равенство

$$x_1 = \frac{1}{1 + x_0}. \tag{12}$$

Теперь можно высказать предположение, что найденное значение x_1 дает лучшее приближение к истинному значению x, чем первоначальное значение x_0. Это предположение мы можем, однако, доказать, вычитая равенства (11) и (12) одно из другого. Соединив, кроме того, обе дроби, полученные в правой части, в одну, будем иметь:

$$x - x_1 = \frac{x_0 - x}{(1 + x)(1 + x_0)}$$

или, принимая во внимание уравнение (11) и равенство (12),

$$x - x_1 = xx_1(x_0 - x). \tag{13}$$

Последнее уравнение выражает то, что мы хотели доказать. В самом деле, ведь x есть число, меньшее $2/3$, а x_1 согласно (12) тоже правильная дробь, потому что x_0 естественно выбрать положительным, и тогда в правой части равенства (12) знаменатель непременно больше числителя. Таким образом находим

$$x - x_1 < \frac{2}{3}(x_0 - x)^*,$$

и отсюда усматриваем, что

> *приближенное значение x_1 отличается от истинного значения x меньше, чем приближенное значение x_0.*

Далее, непосредственно усматриваем, что если значение x_0 больше, чем x, и, слеедовательно, разность $x_0 - x$ положительное число, то разность $x - x_1$ тоже положительна, т. е. x_1 меньше истинного значения x и наоборот, если x_0 меньше истинного значения, то x_1 больше x.

> *Таким образом, значения x_0 и x_1 находятся по разные стороны истинного значения x. Если одно из них больше x, то другое меньше.*

Теперь ясно, что, если мы, исходя из первого приближенного значения x_0, найдем более точное приближенное значение x_1, то последнее может быть использовано для повторного улучшения значения,

* Здесь, собственно, речь идет не о самих разностях, а об их абсолютных величинах. — *Прим. ред.*

т. е. если мы опять положим

$$x_2 = \frac{1}{1 + x_1}, \tag{14}$$

то этим самым получим еще более точное приближенное значение x_2. Все, что мы сказали о приближенных значениях x_0 и x_1, справедливо также и для чисел x_1 и x_2, так как между ними та же зависимость. Можно продолжать так дальше и последовательно полагать

$$x_3 = \frac{1}{1 + x_2}, \quad x_4 = \frac{1}{1 + x_3} \tag{14a}$$

и т. д.

Таким образом получаются все более и более точные значения x_3, x_4 и т. д.

Выберем в качестве значения для x_0 какую-нибудь правильную дробь или единицу, т. е. предположим, что

$$x_0 = \frac{n_0}{n_1},$$

где n_0 и n_1 суть целые числа, причем

$$n_0 \leqslant n_1.$$

Тогда будем иметь

$$x_1 = \frac{1}{1 + x_0} = \frac{n_1}{n_1 + n_0}.$$

Если мы положим

$$x_1 = \frac{n_1}{n_2},$$

то

$$n_2 = n_0 + n_1.$$

Непосредственно ясно, что совершенно также получим, что

$$x_2 = \frac{n_2}{n_3},$$

если положить

$$n_3 = n_1 + n_2$$

и т. д.

Коротко говоря, мы получаем ряд приближенных значений x:

$$\begin{aligned} &x_0 = \frac{n_0}{n_1}, \quad x_1 = \frac{n_1}{n_2}, \\ &x_2 = \frac{n_2}{n_3}, \quad x_3 = \frac{n_3}{n_4} \quad \text{и т. д.} \end{aligned} \tag{15}$$

и при этом:

$$\begin{cases} n_2 = n_0 + n_1, \\ n_3 = n_1 + n_2, \\ n_4 = n_2 + n_3 \end{cases} \tag{16}$$

и т. д.

В последовательности целых чисел n_0, n_1, n_2, n_3, n_4 и т. д. каждое число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих.

Этим выражен очень простой закон, по которому получаются дроби, приближенно выражающие значение x, т. е. значение отношения золотого сечения. В этом ряде оба первых числа n_0 и n_1 подчинены лишь единственному условию

$$n_0 \leqslant n_1.$$

Ими определяются по порядку все остальные числа последовательности; при этом отношения (15) представляют все более и более точные приближенные значения отношения золотого сечения.

Едва ли нужно особо упомянуть, что числа n_0 и n_1 должны быть выбраны взаимно простыми для того, чтобы не вводить излишних общих делителей в числители и знаменатели всех приближенных дробей.

Исследуем теперь еще ближе, каким образом приближенные значения

$$\frac{n_0}{n_1}, \frac{n_1}{n_2}, \frac{n_2}{n_3}$$

и т. д. все более и более приближаются к искомой величине x.

Мы должны с этой целью вывести одно важное соотношение между числами последовательности

$$n_0, n_1, n_2, n_3, n_4 \quad \text{и т. д.}$$

Для этого составим выражение

$$n_1 n_3 - n_2^2.$$

Так как в нем

$$n_3 = n_1 + n_2,$$

то мы получаем для него значение

$$n_1(n_1 + n_2) - n_2^2$$

или, если мы еще подставим $n_2 = n_0 + n_1$:

$$n_1(n_0 + 2n_1) - (n_0 + n_1)^2.$$

Если мы раскроем скобки, оно примет вид

$$n_0n_1 + 2n_1^2 - n_0^2 - 2n_0n_1 - n_1^2,$$

а после упрощения

$$-\left(n_0^2 + n_0n_1 - n_1^2\right)$$

и будет равно $-N$, если положить

$$N = n_0^2 + n_0n_1 - n_1^2.$$

Выражение для N можно написать еще в таком виде:

$$N = n_0(n_0 + n_1) - n_1^2,$$

или

$$N = n_0n_2 - n_1^2.$$

Таким образом, мы нашли, что

$$n_0n_2 - n_1^2 = -\left(n_1n_3 - n_2^2\right).$$

Но так как числа n_1, n_2, n_3, n_4 связаны между собой той же зависимостью, что и числа n_0, n_1, n_2, n_3, то будет также иметь место и соотношение

$$n_1 n_3 - n_2^2 = -\left(n_2 n_4 - n_3^2\right)$$

и т. д. На этом основании мы можем написать следующий ряд равенств:

$$\begin{cases} n_0 n_2 - n_1^2 = +N, \\ n_1 n_3 - n_2^2 = -N, \\ n_2 n_4 - n_3^2 = +N, \\ n_3 n_5 - n_4^2 = -N, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \tag{17}$$

и т. д.

Эти равенства выражают ту зависимость, которую мы хотели доказать.

Из них можно вывести очень простое выражение для разности двух последовательных приближенных значений из ряда

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \quad \text{и т. д.}$$

В самом деле, прежде всего находим

$$x_0 - x_1 = \frac{n_0}{n_1} - \frac{n_1}{n_2} = \frac{n_0 n_2 - n_1^2}{n_1 n_2},$$

или

$$x_0 - x_1 = \frac{N}{n_1 n_2}$$

и таким же образом далее

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -\dfrac{N}{n_2 n_3}, \\ x_2 - x_3 = +\dfrac{N}{n_3 n_4}, \\ x_3 - x_4 = -\dfrac{N}{n_4 n_5}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \tag{18}$$

и т. д.

Из этих равенств мы можем составить себе ясную картину того, как приближенные значения следуют друг за другом. Мы видим, что разность попеременно то положительна, то отрицательна. В соответствии с этим приближенные значения то превосходят истинное значение x, то не достигают его. Далее усматриваем, что разности быстро убывают по абсолютной величине, потому что они обратно пропорциональны произведениям n_1n_2, n_2n_3, n_3n_4 и т. д. Таким образом приближенные значения располагаются все теснее и теснее, приближаясь с обеих сторон к истинному значению, которое неизменно находится между двумя последовательными приближенными значениями.

Задача, которую мы себе поставили, все же еще полностью не решена. До сих пор мы только показали способ последовательного вычисления все *лучших* приближенных значений для числа x, выражающего отношение золотого сечения, исходя из одного какимлибо образом найденного приближенного значения. Но мы должны постараться из всех возможных приближенных значений выбрать наилучшее.

Для этого мы должны прежде всего заняться вопросом о том, как вообще судить о качестве приближенного значения.

Истинное значение x в точности удовлетворяет уравнению (6), и таким образом с полной строгостью выполняется равенство

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

Если же мы не имеем точного значения x, а лишь, быть может, несколько превосходящее его значение $x + \delta$, тогда выражение, построенное для $x + \delta$, аналогично выражению

$$x^2 + x - 1 = 0,$$

не в точности равное нулю, а равно некоторому числу ε. Таким образом имеем

$$(x + \delta)^2 + (x + \delta) - 1 = \varepsilon.$$

Если мы вычислим в этом равенстве левую часть и примем во внимание предыдущее равенство, то найдем

$$2x\delta + \delta^2 + \delta = \varepsilon,$$

а отсюда непосредственно усматривается, что ε все время возрастает вместе с δ, и что таким образом из двух приближенных значений наилучшим, т. е. наиболее близким к x, является то, для которого ε, т. е. выражение, полученное от подстановки в

$$x^2 + x - 1$$

вместо x его приближенного значения $x + \delta$, будет наименьшим. Таким образом, это выражение служит мерой достоинства приближения, но пока только для избыточных приближенных значений $x + \delta$.

Если же мы возьмем недостаточное значение $x - \delta$ и составим соответствующее выражение

$$(x - \delta)^2 + (x - \delta) - 1 = \varepsilon,$$

то получится аналогично предыдущему

$$-2x\delta + \delta^2 - \delta = \varepsilon$$

или также

$$(2x + 1 - \delta)\delta = -\varepsilon.$$

Левая часть этого равенства есть произведение двух множителей δ и $2x+1-\delta$, сумма которых равна постоянному числу $2x + 1$. Это произведение вместе с возрастанием δ, начиная от 0, возрастает до тех пор, пока его множители не сравняются, т. е. пока не установится равенство

$$\delta = 2x + 1 - \delta,$$

откуда

$$\delta = x + \frac{1}{2}^{*}.$$

В этом случае мы имели бы

$$x - \delta = -\frac{1}{2},$$

т. е. приближенное значение $x - \delta$ было бы отрицательно. Поэтому, поскольку мы рассматриваем только положительные приближенные значения, вместе с увеличением разности между истинным значением и приближенным возрастает по абсолютной величине и рассматриваемое выражение

$$x^2 + x - 1,$$

если мы вместо x представим себе подставленным в него приближенное значение.

Выберем теперь в качестве приближенного значения для x поначалу произвольно взятое число

$$x_0 = \frac{n_0}{n_1}.$$

* Все это становится непосредственно очевидным, если представить выражение

$$(2x + 1 - \delta)\delta$$

в виде разности квадратов:

$$\left(\frac{2x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{2x+1}{2} - \delta\right)^2.$$

— *Прим. ред.*

Тогда упомянутое выражение примет вид

$$\varepsilon_0 = x_0^2 + x_0 - 1,$$

а если мы подставим вместо x_0 его значение, то получим

$$\varepsilon = \frac{n_0^2 + n_0 n_1 - n_1^2}{n_1^2},$$

т. е. принимая во внимания значения числителя этой дроби,

$$\varepsilon = \frac{N}{n_1^2}.$$

Теперь мы непосредственно можем дать ответ на тот вопрос, который мы себе поставили. Предположим, что в приближенном значении

$$x_0 = \frac{n_0}{n_1}$$

n_1 наперед задано, или по крайней мере его верхняя граница n точно установлена. При этих условиях задача заключается в том, чтобы как так определить дробь x_0, чтобы ее знаменатель не превзошел установленной границы, и чтобы при этом было достигнуто наилучшее приближение к искомой величине x. Как выше было установлено, последнее будет иметь место тогда, когда абсолютная величина дроби $\frac{N}{n_1^2}$ будет иметь возможно меньшее значение.

Для этого надо N придать наименьшее из возможных для него значений. Но N необходимо должно быть целым. Нулем оно не может быть, так как тогда имело бы место:

$$n_0^2 + n_0 n_1 - n_1^2 = 0,$$

и вместе с тем

$$\frac{n_0^2}{n_1^2} + \frac{n_0}{n_1} - 1 = 0$$

или

$$x_0^2 + x_0 - 1 = 0,$$

т. е. тогда x_0 было бы точным решением, что невозможно. Таким образом, в качестве наименьшего значения мы можем взять

$$N = \pm 1.$$

Сообразно с этим n_0 и n_1 мы должны так определить, чтобы было

$$n_0^2 + n_0 n_1 - n_1^2 = \pm 1.$$

Если дробью $\frac{n_0}{n_1}$ достигается наилучшее приближение ε_0, то это значит, что никакой другой дробью $\frac{n_0'}{n_1'}$, в которой знаменатель

$$n_1' < n_1,$$

лучшее приближение не может быть достигнуто. Справедливость этого усматривается тотчас же. А именно:

если бы такая дробь $\frac{n'_0}{n'_1}$ существовала, то значение величины приближения было бы

$$\varepsilon' = \pm \frac{N'}{n_1'^2},$$

где N' есть целое положительное число. Если таким образом

$$\varepsilon'_0 < \varepsilon_0,$$

то следовательно

$$\frac{N'}{n_1'^2} < \frac{1}{n_1^2},$$

а отсюда

$$N' < \frac{n_1'^2}{n_1^2},$$

что невозможно, если

$$n'_1 < n_1.$$

Но если решено уравнение

$$n_0^2 + n_0 n_1 - n_1^2 = \pm 1,$$

и этим найдено приближенное значение отношения золотого сечения, то мы можем вышеприведенным способом найти для него лучшее значение, полагая

$$n_2 = n_0 + n_1.$$

Продолжая так же дальше, мы можем найти еще лучшее значение $\frac{n_2}{n_3}$, полагая $n_3 = n_1 + n_2$ и т. д. При этом мы получим числовой ряд

$$n_0, n_1, n_2, n_3, n_4 \quad \text{и т. д.},$$

в котором каждое число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих, и соответствующий ему ряд приближенных значений

$$x_0 = \frac{n_0}{n_1}, \quad x_1 = \frac{n_1}{n_2},$$

$$x_2 = \frac{n_2}{n_3}, \quad x_3 = \frac{n_3}{n_4} \quad \text{и т. д.}$$

Если мы для

$$N = n_0^2 + n_0 n_1 - n_1^2$$

выберем значение $+1$, вышеприведенные равенства (17) превращаются теперь в

$$n_0 n_2 - n_1^2 = +1,$$

$$n_1 n_3 - n_2^2 = -1,$$

$$n_2 n_4 - n_3^2 = +1$$

и т. д.

В частности, наименьшими из возможных целых решений уравнения

$$n_0^2 + n_0 n_1 - n_1^2 = +1$$

будут

$$n_0 = 1, \quad n_1 = 1.$$

Ими определяются остальные пары:

$$n_1 = 1, \quad n_2 = 2,$$
$$n_2 = 2, \quad n_3 = 3,$$
$$n_3 = 3, \quad n_4 = 5$$

и т. д.

Для последовательности приближенных дробей будем, таким образом, иметь:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \frac{34}{55}, \frac{55}{89} \quad \text{и т. д.} \qquad (19)$$

Нами уже доказано, что каждая из этих дробей дает относительно наилучшее приближение, в том смысле, что не существует дроби с меньшим знаменателем, дающей лучшее приближение. Но мы еще, кроме того, докажем, что всякая приближенная дробь, знаменатель которой лежит между знаменателем двух рядом стоящих дробей данной последовательности, дает худшее приближение к истинному значению x, чем предшествующая дробь, несмотря на то что знаменатель последней меньше. Таким образом, дроби этой последовательности должны быть абсолютно наилучшими из всех возможных приближенных дробей.

Для доказательства этого предположим, что $\frac{n'_0}{n'_1}$ есть лучшее приближенное значение, чем $\frac{n_0}{n_1}$, и что его знаменатель больше, чем n_1, но меньше, чем $n_0 + n_1$.

Для меры приближения дроби $\frac{n_0'}{n_1'}$ мы имеем выражение

$$\varepsilon_0' = \pm\frac{N'}{n_1'^2},$$

в котором N' есть положительное число, а соответствующая величина для дроби $\frac{n_0}{n_1}$ равна $\pm\frac{1}{n_1^2}$, поэтому, если дробь $\frac{n_0'}{n_1'}$ дает лучшее приближение, чем дробь $\frac{n_0}{n_1}$, то должно быть

$$\frac{N'}{n_1'^2} < \frac{1}{n_1^2}.$$

Отсюда следует

$$N' < \left(\frac{n_1'}{n_1}\right)^2,$$

а так как

$$n_1' < n_0 + n_1,$$

то

$$N' < \left(1 + \frac{n_0}{n_1}\right)^2.$$

Заметим, что все дроби последовательности (19), кроме первой, $\leqslant \frac{2}{3}$. Если мы, таким образом, под $\frac{n_0}{n_1}$ разумеем какую-либо дробь последовательности за исключением первой (что возможно без ущерба для общности, так как между 1 и 2 нет целых чисел и поэтому доказательство к промежутку (к диапазону) между $\frac{1}{1}$ и $\frac{1}{2}$ не относится), то будем иметь

$$\frac{n_0}{n_1} \leqslant \frac{2}{3}$$

и вследствие этого

$$N' < \left(1 + \frac{2}{3}\right)^2,$$

или

$$N' < \frac{25}{9}.$$

То есть N' может принять значение только 1 или 2. Но N' не может быть 2, так как выражение

$$N' = n'_0(n'_0 + n'_1) - n'^2_1$$

есть число нечетное, потому что числа n'_0, n'_1, не имея общих делителей, не могут быть оба одновременно четными. Таким образом, остается только значение $N' = 1$.

Но все приближенные значения, соответствующие $N' = 1$, входят в состав ряда (19), так что между ними уже никаких других не может быть, и этим завершается доказательство. А что в действительности рядом (19) исчерпываются все приближенные значения, соответствующие $N' = \pm 1$, усматривается легко.

В самом деле, если бы $\frac{n_0}{n_1}$, было одним из таких значений, то таковым же было бы $\frac{n_1 - n_0}{n_0}$, так как

$$(n_1 - n_0)^2 + (n_1 - n_0)n_0 - n_0^2 = -\left[n_0^2 + n_0 n_1 - n_1^2\right].$$

Таким образом, каждое решение дает возможность найти другое решение с меньшим числителем и знаменателем. Последнее, в свою очередь, дает возможность найти решение с еще меньшими числителем и знаменателем. И так можно продолжать до тех пор, пока не будет найдено решение в наименьших возможных числах, а именно

$$n_0 = 1, \quad n_1 = 1.$$

Посредством этого решения можно обратно получить все прежние совершенно тем же способом, каким был получен ряд (19). поэтому первоначально взятое значение должно принадлежать этому ряду.

Таким образом, мы доказали, что ряд (19) вообще исчерпывает все приближенные значения, подлежащие рассмотрению. Всякое другое приближенное значение может быть заменено лучшим, находящимся в этом ряде, и притом с меньшим знаменателем.

Мы можем представить образование чисел (19) следующим образом. Если x_0 одно из таких чисел, то следующим будет

$$x_1 = \frac{1}{1 + x_0}.$$

Но первое значение есть

$$\frac{1}{1},$$

поэтому второе

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1}},$$

третье

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}},$$

четвертое

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}$$

и таким образом продолжается дальше. Выражения, которые мы получили, суть так называемые *непрерывные дроби*. Общий вид такой дроби следующий:

$$\frac{1}{m_0+\frac{1}{m_1+\frac{1}{m_2+\frac{1}{m_3+\frac{1}{m_4}}}}},$$

причем это выражение может быть и дальше продолжено. В нашем случае мы имеем простейшую из вообще существующих непрерывных дробей, так как здесь целые числа m_0, m_1, m_2 и т. д. все равны 1. Этим самым приближенные значения отношения золотого сечения получают элементарно-арифметический смысл.

Чем больше взять звеньев в непрерывной дроби, тем точнее будет вычисленное отсюда приближенное значение. В этом случае употребляется следующее выражение: точное значение x получается при *бесконечном* продолжении процесса, и это бесконечное продолжение обозначают многоточием на конце. Таким образом пишут:

$$x = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}.$$

Формально мы этим самым получим выражение для точного значения x. Однако, смысл написанного равенства лишь тот, что если мы составление дроби в каком-либо месте прервем, то полученное при этом приближенное значение будет тем точнее, чем дальше это место от начала[2)].

[2)] Для читателя, знакомого с понятием о пределе, ясно, что сущность дела в том, что x является именно *пределом* для дробей, получающихся из написанного выше выражения, если его обрывать последовательно на первом, втором, третьем, ... звеньях. — *Прим. ред.*

При всяком практическом применении приближенных значений полезно, для уяснения степени их приближения, написать, как истинное значение, так и приближенные, в виде десятичных дробей, удовлетворяясь при этом определенной точностью, например, до 3-го десятичного знака. Тогда будем иметь

$$x = 0{,}618$$

и

$$\frac{2}{3} = 0{,}667, \quad \frac{8}{13} = 0{,}615,$$
$$\frac{3}{5} = 0{,}600, \quad \frac{13}{21} = 0{,}619,$$
$$\frac{5}{8} = 0{,}625, \quad \frac{21}{34} = 0{,}618.$$

Таким образом, здесь мы имеем совпадение до положенного знака.

На основании соотношения

$$x^2 = 1 - x$$

из приближенных значений (19) непосредственно получаются приближенные значения для квадрата отношения x

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{5}, \quad \frac{3}{8} \quad \text{и т. д.}$$

Этим между прочим $\sqrt{\frac{1}{3}}$ вводится в качестве приближенного значения для отношения золотого сечения. В действительности оно мало отличается от x, а именно меньше, чем на $\frac{1}{25}$. Это отношение

$$v = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

есть, можно сказать, соперник золотого сечения. Это есть отношение половины стороны равностороннего треугольника к его высоте, и поэтому легко может быть геометрически построено. Для того, чтобы его арифметически проанализировать, лучше всего развернуть его в непрерывную дробь. Этой непрерывной дробью, которую мы приводим без доказательства, будет

$$v = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}}.$$

Отсюда видно, что закон составления этой дроби также очень прост. Ее приближенные значения суть:

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{4}{7}, \quad \frac{11}{19}, \quad \frac{15}{26}, \quad \frac{41}{71} \quad \text{и т. д.}$$

Закон, по которому вычисляются эти дроби, следующий: если мы обозначим четыре подряд расположенных следующих друг за другом дроби, начиная от второй, четвертой или шестой и т. д., через

$$\frac{m_0}{n_0}, \quad \frac{m_1}{n_1}, \quad \frac{m_2}{n_2}, \quad \frac{m_3}{n_3},$$

то будем иметь

$$\frac{m_2}{n_2} = \frac{m_0 + m_1}{n_0 + n_1}, \quad \frac{m_3}{n_3} = \frac{m_1 + 2m_2}{n_1 + 2n_2}.$$

Приближенное значение $\frac{41}{47}$ во всяком случае для практических надобностей достаточно точно, в большинстве случаев за таковое принимают даже значение $\frac{4}{7}$.

Часть 2

Эстетическое значение золотого сечения

Вышеизложенное представляет небольшую замкнутую главу элементарной математики, которая, без сомнения, не лишена некоторого изящества. Но ничего чудесного она в себе не заключает, во всяком случае не более, чем какое-либо другое математическое исследование, связанное с целесообразно поставленной задачей. Однако, с давних пор золотое сечение окружено было чарами таинственности. Область чистой математики не может заключать в себе ничего таинственного. Где же мы должны его искать?

Чудесное появилось здесь, как то часто бывает, вследствие внутренней склонности человека, побуждающей его находить объяснение всему загадочному в мире с помощью мистического углубления в последние основы бытия. Вследствие этого свойства явилось философское толкование математических форм, которое встречается у вавилонян и, может быть, даже у египтян, а у пифагорейцев сделалось руководящим принципом в миропонимании. Это миропонимание заключает в себе и фигуру пентаграммы, с которой мы связали рассмотрение золотого сечения.

Мистическое толкование геометрических форм стоит в тесной связи с аналогичным толкованием арифметических форм, т. е. чисел. Первенствующая роль, которую играют числа в миропонимании пифагорейцев, общеизвестна. Такое применение чисел нашему рассудочному познаванию уже больше ничего не говорит, так как оно по существу совершенно отлично от того, как современное естествознание применяет математику для исследования явлений природы. Последнее выражает только количественные соотношения языком математических формул, пифагорейцы же пытались красоту и совершенство творения объяснить математическими формами; при этом мы часто не можем распознать, идет ли речь об естественном объяснении на таких основаниях или только о символическом истолковании, или же о том и о другом одновременно.

При этом всегда играл большую роль следующий ложный вывод, лежащий в основе всего этого направления мыслей: чем правильнее, тем совершеннее, и чем вещь совершеннее, тем с большей вероятностью можно ее встретить в действительности. Мир есть воплощение абсолютного разума и красоты, и поэтому объяснение его должно исходить из наших понятий о разуме и красоте. Классическим примером такого объяснения мироздания служит «Тимей» Платона. Это удивительное произведение и вместе с тем чуждое нам по наивности, с которой мысли о строении и создании мира основываются на соображении о том, как творец должен был бы его создать наиболее красивым и разумным. Здесь у Платона имеется одно место, которое делает понятным, почему именно отношение золотого сечения, после того, как оно было найдено, представилось наиболее совершенным для эстетического образования природных форм.

Рассуждение исходит из вопроса: Как могут две части составить целое? Как может существующее различие и разъединенность превратиться в единство. Ответ находится следующим характерным путем: прежде всего общее понятие о вещи заменяется частным понятием математической величины, а математическая величина в свою очередь представлена в виде частного образа, а именно — в виде прямолинейного отрезка. Рассмотрение общей метафизической проблемы сводится таким образом к рассмотрению двух прямолинейных отрезков, соединенных в один. Но то обстоятельство, что оба приложенные друг к другу отрезка вместе составляют новый отрезок, еще не доказывает греческим философам, что части действительно соединяются в целое. Это произойдет лишь благодаря тому, что отношение (в математическом смысле этого слова) частей друг к другу вторично получается в виде отношения одной части к целому.

«Невозможно», говорит Платон («Тимей», VII), «чтобы две вещи совершенным образом соединились без третьей, так как между ними должна появиться связь, которая скрепляла бы их. Это наилучшим образом может выполнить пропорция, ибо если три числа обладают тем свойством, что среднее так относится к меньшему, как большее к среднему, и, наоборот, меньшее так относится к среднему, как среднее к большему, то последнее и первое будет средним, а среднее — первым и последним. Таким образом, все по необходимости будет тем же самым, а так как оно будет тем же самым, то оно составит целое».

Но надо сказать, что сам Платон не пользовался этим рассуждением для вывода золотого сечения и применения его к строению вселенной. Поэтому тот, кто от Платона ждет открытия золотого сечения и его мнимого значения в строении вселенной, тот будет прежде всего разочарован. Разочарование еще усиливается, когда обнаруживается, что Платон строит мир посредством геометрических форм, но только он пользуется при этом совсем не теми фигурами, которые дают отношение золотого сечения. Эти фигуры плоские, потому что Платон предполагал, что пространство образуется присоединением к двум измерениям плоскости третьего измерения (глубины). Но основная плоская фигура, говорит Платон, есть прямоугольный треугольник и существует два рода таких треугольников – один с равными и один с неравными катетами. Существует только одна форма первых, а вторых имеется бесчисленное множество. Среди этого бесчисленного множества мы должны найти самую красивую форму, чтобы систематически двигаться дальше. Прекраснейший прямоугольный треугольник, поясняет Платон, тот треугольник, у которого гипотенуза вдвое больше меньшего из катетов, и который представляет из себя половину равностороннего треугольника. Но этим самым выдвигается другое отношение, а именно отношение $1 : \sqrt{3}$ катетов этого прямоугольного треугольника, которое может непосредственно заменить золотое сечение и в действительности до известной степени представляло из себя соперника золотого сечения.

Но если присмотреться поближе, то все же оказывается, что это устранение золотого сечения только кажущееся. Ведь Платон только земной мир строит при помощи прямоугольных треугольников двух родов. Он соединяет равнобедренные прямоугольные треугольники в квадраты, а неравнобедренные – в равносторонние треугольники. Из квадратов он составляет куб, а из равносторонних треугольников – правильные многогранники: тетраэдр, октаэдр и икосаэдр (двадцатигранник). Эти четыре фигуры он относит к четырем земным элементам, куб — к твердой и неизменяющейся земле, а остальные три — к движущимся, постоянно изменяющимся и друг друга уничтожающим элементам — огню, воздуху и воде.

Но при этом еще одно правильное тело остается без рассмотрения, а именно додекаэдр, грани которого суть правильные пятиугольники. Только это тело символически изображает строение небесного мира, а так как в связи с правильным пятиугольником должно появиться, как мы установили, отношение золотого сечения, то последнее и играет главную роль в небесном мире. Изображение мира, данное Платоном, находится в близком родстве с объяснением пифагорейцев, которое впрочем и было изложено Платоном устами пифагорейца Тимея. Оно нравилось, как следствие определенной системы. Таковым оно казалось также в эпоху раннего итальянского возрождения, когда оно снова было принято вместе с философией Платона.

К этому времени, а именно к последним годам пятнадцатого столетия, относится первое самостоятельное сочинение о золотом сечении, написанное братом миноритом **Лукой Пачиоли** (Luca Pacioli) и озаглавленное **de Divina proportione**, т. е. о божественном отношении. Существует новое, хотя и не вполне удовлетворительное, издание этого произведения и приложенной к нему статьи об архитектуре, вместе с немецким их переводом, принадлежащее К. Винтербергу (Quellenschriften für Kunstgeschichte und Kunsttechnik des Mittelalters und der Neuzeit, Neue Folge, 2. Band. Wien: Carl Greser, 1889). Впрочем, эта книга разочаровывает, если ждать от нее самостоятельного и ценного содержания. В существенном она ограничивается точным воспроизведением отдельных частей элементов Эвклида; это доказывает, с каким еще трудом в те времена справлялись с геометрией, и как мало могли выйти за пределы изучения великого греческого учителя.

У Луки Пачиоли ясно обнаруживается стремление найти твердую геометрическую основу искусства, но он не был способен пойти дальше повторения и разъяснения того, что имеется у Эвклида. Он был личным другом **Леонардо да Винчи** (Lionardo da Vinci), на геометрические занятия которого он, несомненно, имел влияние. Венецианского художника **Якопо де Барбари** (Jacopo de Barbari) он обучал геометрии, и последний в благодарность написал картину, изображающую самого художника рядом со своим учителем (рис. 5). Перед обоими на столе стоит додекаэдр, на котором обнаруживается отношение золотого сечения, и в свободном углу слева наверху с большой любовью и тщательностью изображено замечательное тело, поверхность которого состоит из квадратов и равносторонних треугольников (рис. 6). Это тело разделено

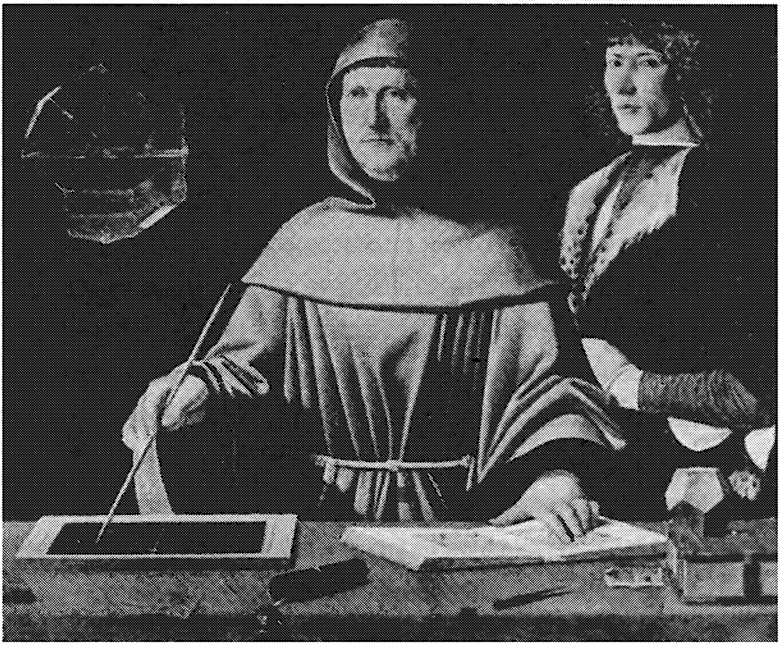


Рис. 5. Портрет Луки Пачиоли, приписываемый Якопо де Барбари, 1495. На столе лежат несколько геометрических приборов: грифельная доска, циркуль и модель додекаэдра. В верхнем левом углу наблюдаем висящий ромбикубоктаэдр, наполовину наполненный водой. На картине Лука Пачиоли доказывает одну из теорем Эвклида

на две части плоскостью (рис. 7), проходящей через середину его высоты, и эта плоскость делит ребра, которые она пересекает, в отношении золотого сечения[1].

[1] Воспроизведение этой картины можно найти у Г. Вольфа (G. Wolf) в его статье «Математика в живописи» (Math.-Phys. BibL.

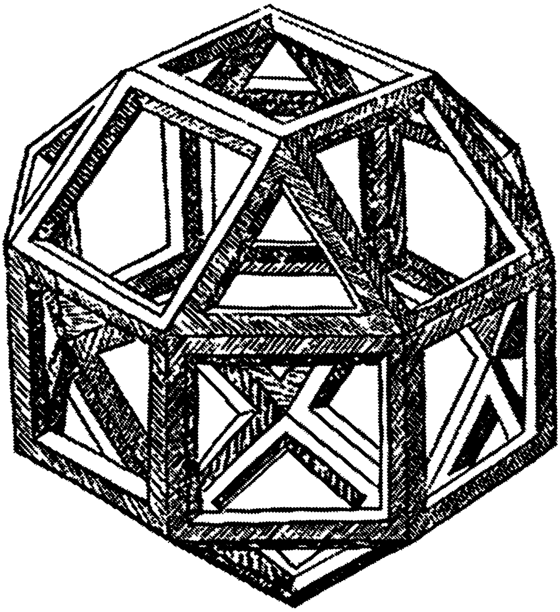


Рис. 6. Первое печатное изображение ромбикубоктаэдра, сделанное Леонардо да Винчи

Но такое превозношение золотого сечения вызвано не геометрическим интересом к нему, а вновь появившимся старым пифагорейским взглядом на определенные числовые соотношения, как на основы строения вселенной.

Сам автор объясняет это тем, что в пропорции золотого сечения проявляются чудесные свойства, при-

20/21. Leipzig, Teubner), в русск. перев. в изд. «Научного Книгоиздательства» 1924 г.

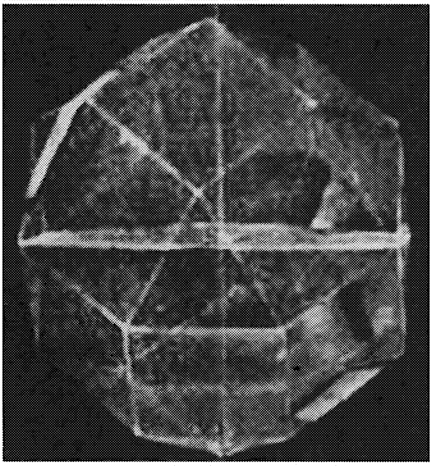


Рис. 7. Ромбикубоктаэдр (фрагмент портрета Луки Пачиоли). Тело наполовину наполнено водой. Поверхность воды делит ромбикубоктаэдр на две равные части, а его ребра — в отношении золотого сечения

сущие самому богу. Из этих свойств он выбирает следующие пять:

«Первое заключается в том, что существует только она одна, и невозможно привести примера пропорций другого рода или хотя сколько-нибудь отличающихся от нее. Эта единственность, согласно с политическим и философским учениями, есть высочайшее свойство самого бога. Второе свойство есть свойство святой триединости, а именно, как в божестве одна и та же сущность заключается в трех лицах – отце, сыне и святом духе, так же и одна и та же пропорция этого рода может иметь место только для трех выражений, а для большего или меньшего числа выражений не существует. Третье свойство заключается в том, что, подобно тому, как бог не может быть ни определен, ни словами разъяснен, наша пропорция не может быть выражена ни доступным нам числом, ни какой бы то ни было рациональной величиной и остается скрытой и тайной и поэтому математиками названа иррациональной. Четвертое свойство заключается в том, что, подобно тому, как бог никогда не изменяется и представляет все во всем и все в каждой своей части, и наша пропорция для всякой непрерывной и определенной величины одна и та же, велики ли или малы эти части, никаким способом не может быть ни изменена, ни по иному воспринята рассудком. К названным свойствам вполне справедливо можно присоединить пятое свойство, заключающееся в том, что, подобно тому как бог вызвал к бытию небесную добродетель, иначе называемую пятой субстанцией, а с ее помощью — четыре других простых тела, именно, четыре элемента — землю, воду, воздух и огонь, а с их помощью вызвал к бытию всякую другую вещь в природе, так и наша священная пропорция, согласно Платону в его „Тимее“, дает формальное бытие самому небу, ибо ему приписывается вид тела, называемого додекаэдром, которое невозможно построить без нашей пропорции».

Такое метафизическое толкование золотого сечения, конечно, не подходит для современного критического ума. Оно слишком отзывается суеверием и недостаточно — наукой. Нам оно представляется только замечательным заблуждением человеческого пытливого ума, но не серьезным знанием. И все же такие метафизические соображения, хотя и в другой форме или явно выраженные, появляются и легко, и часто, как только размышления направляются на происхождение и значение форм бытия, и всегда снова золотое сечение наталкивало на разыскание пути в таинственную область метафизики.

Но, конечно, если бы мы и должны были установить отношение золотого сечения в качестве общей нормы природы, этого не было бы необходимо связывать с метафизической подоплекой. Скорее мы могли бы рассматривать это как закон, выведенный на основании опыта и стоящий в ряду с другими законами природы. Во всяком случае, можно наперед весьма усомниться в том, чтобы в многообразии форм природы, у которых соотношения длины обусловлены не эстетическими соотношениями, подобно художественным произведениям, а причинной зависимостью, сплошь наблюдалось определенное отношение длин.

Когда пытаются найти такой закон пропорциональности в природе, в основу объяснения природы кладется принцип, отличный от причинной связи, и этим самым объяснение становится все-таки всегда на почву метафизики. Это ясно обнаруживается у человека, который был самым решительным и последовательным сторонником убеждения в всеобъемлющем значении золотого сечения для строения образов природы.

Я имею в виду **Цейзинга** (*Zeising*. Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers. Leipzig, 1854). Он там сам высказывает руководящую основную мысль, что построение частей в отношении золотого сечения есть «вообще основной принцип всякого созидания, стремящегося к красоте и цельности, как в царстве природы, так и в области искусства. Оно изначально представлялось высшей целью и идеалом всякого образования форм и отношений, как космических, так и индивидуальных, как органических, так и неорганических, как звуковых, так и световых, но лишь в человеческом теле нашло свое полнейшее осуществление».

Можно принять закон пропорций в природе в такой всеобъемлющей форме только после того, как его справедливость будет твердо и бесспорно доказана. Это, однако, не было осуществлено и в следующей за Цейзингом работе **Франца Ксавера Пфейфера** (*Franz Xaver Pfeifer*. Der Goldene Schnitt. Augsburg, 1885), несмотря на то что последний дает уже фотографические снимки объектов природы с соответствующими измерениями и затрагивает обширную область царства природы. Эти исследования вызывают сомнения в двух различных направлениях. Прежде всего, измерения не произведены по строгому и единообразному принципу. Ясно, что в подобном случае остается некоторая свобода в выборе предметов, которые измеряются, и открыта возможность так производить измерение, чтобы оно дало желаемое отношение. Затем можно также бояться того, что измерения производятся у таких предметов, в которых уже наперед глазомером усмотрено требуемое отношение. Ясно, что если встречающиеся отношения колеблются в известных пределах, то случайно может также встретиться отношение, совпадающее с отношением золотого сечения. Если выбрать подходящие объекты природы, равно как части его, ветку или член, и произвести у них измерения, то не следует удивляться, что получаются как-будто бы благоприятные результаты (рис. 8).

К тому же в природе, по-видимому, действительно выполняется некоторый закон пропорций, не совпадающий, правда, с отношением золотого сечения, но, так сказать, одного с ним направления. Этот закон можно так сформулировать: когда однородные части следуют друг за другом в порядке убывания величины, если нет возмущающих влияний, уменьшение происходит в геометрической прогрессии; также происходит и увеличение там, где величина частей возрастает. Последний случай, в сущности, сводится к первому,

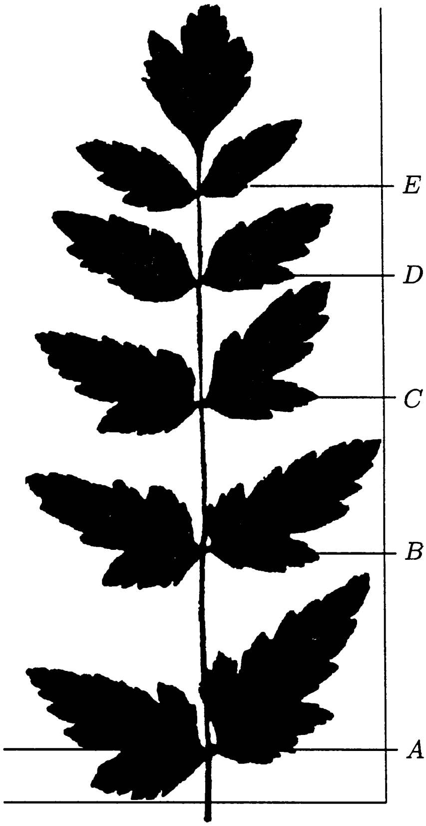


Рис. 8. Если выбрать объект природы и части его подходящим образом, и произвести у них измерения, то можно получить отношения, совпадающие с отношением золотого сечения

если рассматривать последовательность в обратном направлении. Но в природе направление нам дано ростом, происходящим с течением времени. Более старые части, из которых вырастают другие — либо самые маленькие, либо самые большие. Этот закон назвали законом натурального роста. Очевидно, что там, где он соблюдается, легко может встретиться и отношение золотого сечения, если и не точное, то во всяком случае приближенное. Но предположить, что оно сплошь имеет место, будет безусловно чересчур смело. Однако практическое исследование вопроса все же далеко превзошло бы поставленные нам здесь границы.

Мы можем также только слегка коснуться частной и наиболее запутанной области применения золотого сечения, а именно учения об отношениях в человеческом теле. На приведенном рис. 9 мы можем усмотреть, как Цейзинг в данном случае применяет числовые отношения, основанные на золотом сечении. Ведь человек рассматривается скульптором, как наиболее совершенное творение природы. Поэтому человеческое тело считалось тоже во все времена высшим и достойнейшим объектом искусства скульптуры, и правильно изобразить человеческое тело в его пропорциях было всегда одной из наиболее достойных художественных задач.

В искусстве строго разделяются два направления, называемые реализмом и идеализмом. Согласно с реалистическим взглядом, установление определенных норм для соотношений человеческого тела является излишним и бесцельным, так как задачей художника всегда служит изображение данного частного тела.

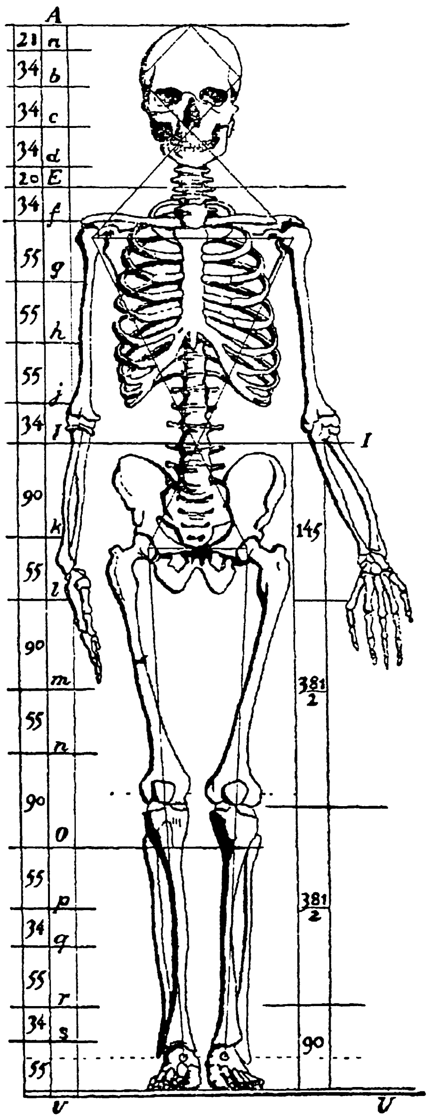


Рис. 9. Отношения в человеческом теле

Но отдельное явление должно быть рассмотрено само по себе без пристрастия и предвзятости, обусловленной предварительным установлением нормы. Поэтому для художника необходимо только наблюдение и овладение техникой его искусства, а всякое знание является для него опасным, так как оно нарушает правильность и непосредственность его наблюдения.

Идеалист, наоборот, рассуждает иначе. В человеке, как предмете изображения, он видит не данного отдельного человека, а человека, как родовое понятие. Поэтому художник должен стремиться передать тип, а не определенную модель. Это воззрение господствует, например, во всей эпохе возрождения. Но что представляет собою этот тип? Или его создает действительность, или это только идеал, который мы, благодаря нашей внутренней способности, отвлекаем от действительности; никакая действительность не может его достигнуть, а может только более или менее близко к нему подойти. Если же тип создан действительностью, то он, конечно, не представляет собою единичного явления, а результат сравнения многих единичных явлений. Самый простой прием такого сравнения следующий: измеряют большое число людей, всех одним и тем же способом, из всех таким образом найденных различных величин для одного и того же измерения тела берут каждый раз среднее. Это единственный практически осуществимый прием.

Однако весьма вероятно, что при этом до начала измерений тоже глазомером производится некоторый отбор лиц. С самого начала выбираются такие лица, которые производят впечатление нормальных. Уроды, слишком большие или слишком маленькие люди исключаются.

Такого рода измерения были выполнены Кетеле (Quételet)[2], который нашел, что, по крайней мере, у европейской расы существуют совершенно определенные соотношения между частями тела. Это было его основным результатом. Правда, что отдельные люди так сильно отличаются друг от друга, что разыскание нормального типа человеческой фигуры на первый взгляд кажется невозможным. Тем не менее, таковой существует, и для того, чтобы его обнаружить, не нужно распространять исследование на большое число экземпляров. Достаточно точных наблюдений над несколькими лицами, чтобы найти нормальный тип и признать, что среди изменчивых явлений, может-быть, не найдется ни одного, в котором было бы больше единообразия, чем в человеке. Он взял тридцать человек двадцатилетнего возраста и разделил их на три группы по десять человек в каждой, но таким образом, чтобы в каждой группе средняя величина

[2] Des proportions du corps humain // Bulletin de l'Académie royale de Belgique. T. 15. I. P. 583; II. P. 16. Срав. также его произведение: L'anthropomérie. Bruxelles, 1871.

роста была приблизительно одна и та же. Он нашел, что средние величины результатов измерений у трех групп почти совпадали.

Если нахождение нормального типа человеческого тела таким образом научно обосновано, то все же надо отметить зависимость его от возраста, пола и размера. Все это с самого начала не позволяет нам надеяться на то, что в человеческом теле могут быть найдены совершенно точные соотношения размеров вроде отношения золотого сечения. Можно, конечно, ожидать это только у взрослого человека среднего роста, но все-таки следует рассматривать лиц обоего пола, т. е. приходится тогда считать основные соотношения общими для мужчин и женщин.

Самый простой вид осуществления золотого сечения в человеческом теле заключается в том, что все тело должно поясом делиться в отношении золотого сечения. Точно также при вытянутых по швам руках концы средних пальцев должны весь рост человека делить в отношении золотого сечения. Известное правило, что лоб, нос и нижняя часть лица должны быть равны, дополняется тем, что рот делит нижнюю часть лица в отношении золотого сечения. Брови делят всю голову в отношении золотого сечения и т. д.

Прежде всего очевидно, что это только грубые правила, которые не претендуют на то, чтобы быть

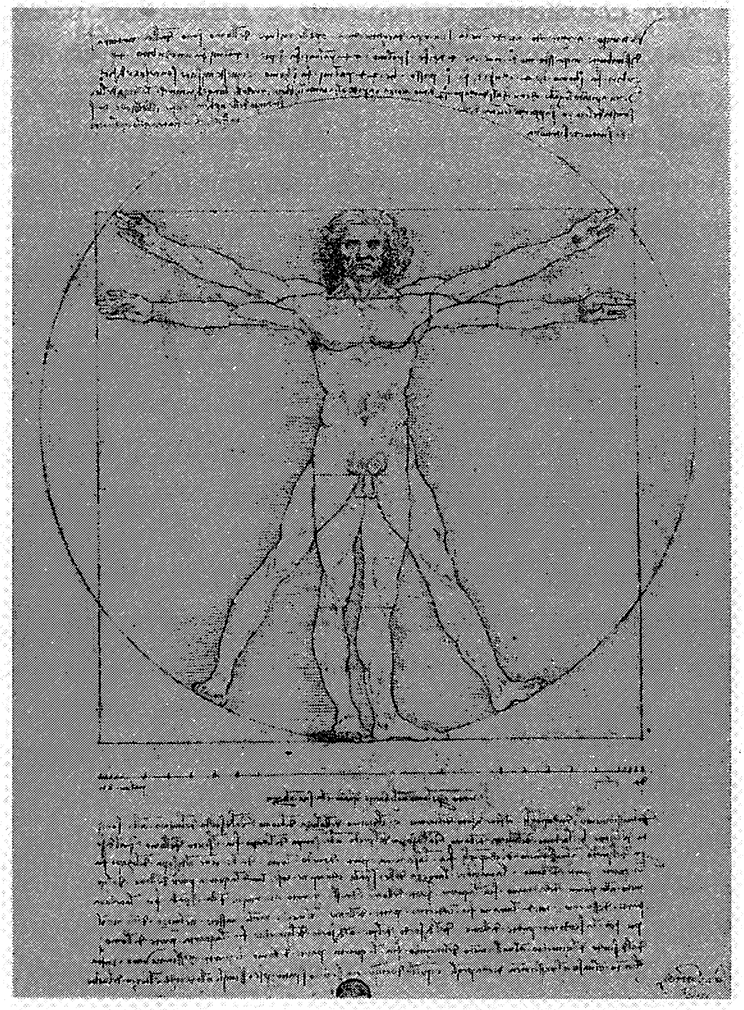


Рис. 10. Человек Витрува. Рисунок Леонардо да Винчи

строго выполненными; они имеют только то значение, что сделанное сообразно с ними изображение производит естественное и правильное впечатление. Они такого же рода, как оба известные предложения Витрува (Vitruv), что около стоящего с вытянутыми руками человека можно описать квадрат, центр которого совпадает с половыми органами, и что около человека с растопыренными ногами и вытянутыми вверх руками можно описать круг, центр которого совпадает с пупом (рис. 10).

Такого рода геометрическое приближение к пропорциям, считающимся нормами, в конце концов, оказалось более удобным и приобрело большее значение, чем арифметическое применение золотого сечения. В частности художник К. Шмидт (*Schmidt C.* Proportionsschlüssel. Stuttgart, 1849) придумал простую геометрическую систему (см. рис. 11), которая кажется очень верной. Она была принята Г. Фритшем (*Fritsch G.* Die Gestalt des Menschen. Stuttgart, 1869). В противоположность им И. Бохенек (*Bochenek Joch.* Die männliche und weibliche Normalgestalt. Berlin, 1875; Canon allen menschlichen Gestalten. Berlin, 1885) и А. Гёрингер (*Goeringer A.* Der Goldene Schnitt und seine Beziehung zum menschlichen Körper. Schöpping, 1893) придерживались принципа золотого сечения.

Весь вопрос о пропорциях мы можем, очевидно, рассматривать таким образом: речь идет о при-

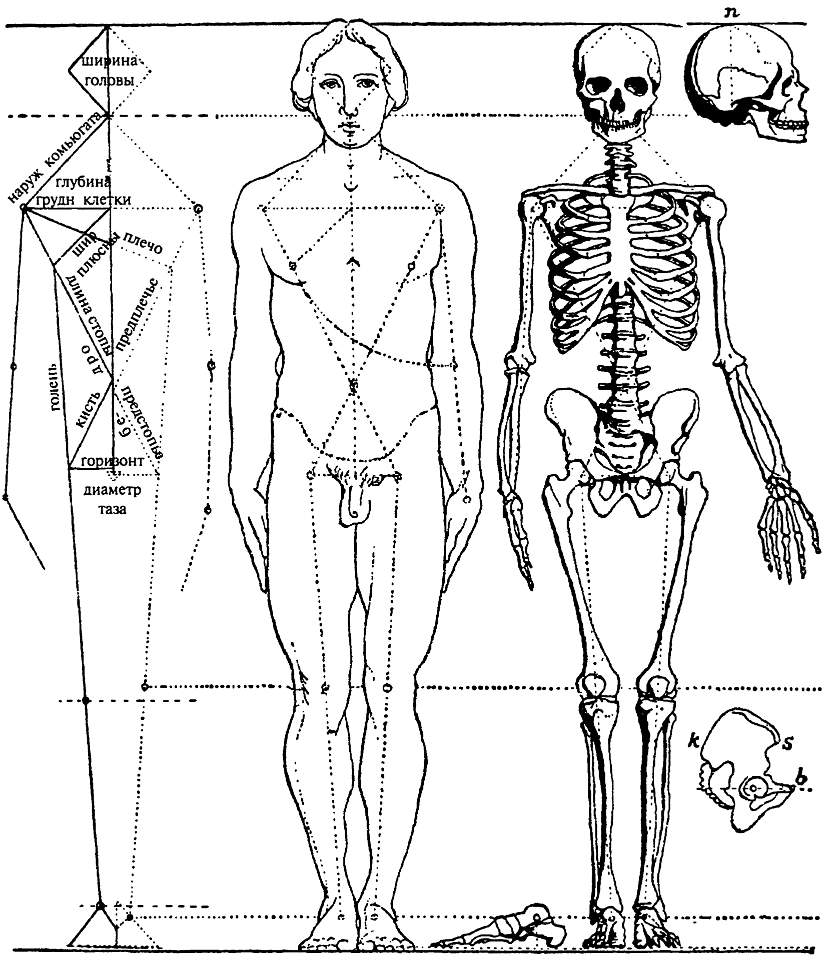


Рис. 11. Геометрическая система К. Шмидта

ближении к определенным средним или нормальным значениям, обнаруживающимся на реальном человеческом теле; это приближение получается либо просто посредством чисел, как это сделали Дюрер (Dürer) в своей книге «О человеческих пропорциях» (Von menschlicher Proportion, 1528) и Шадов (Schadow) в своем «Поликлете» (Polyklet, 1834), или же посредством известных арифметических или геометрических построений. Но даже если бы таким способом было получено еще лучшее приближение, это еще не дает нам права делать отсюда вывод о «законе» так же, как, например, нельзя видеть закона в том, что число $\frac{1}{\pi}$ с чрезвычайно большой степенью точности выражается-дробью $\frac{113}{355}$. При применении выбранного приближенного приема случайно может появиться и пропорция золотого сечения. Но следует весьма скептически относиться ко всем попыткам смотреть на золотое сечение, как на господствующее отношение и вместе с тем как на общую норму природы, до тех пор, пока биометрия, т. е. систематическое измерение живых существ, отрасль науки, находящаяся сейчас в состоянии полного расцвета, не даст этому убедительного доказательства.

Но совершенно иначе стоит вопрос о том, производит ли на нас золотое сечение там, где мы его встречаем, особенно благоприятное впечатление благодаря нашему внутреннему душевному свойству, что стояло бы в тесной связи с его применением в изобразительном искусстве.

Но прежде, чем вникать в этот вопрос, мы должны установить, как вообще может золотое сечение непосредственно проявиться таким образом, чтобы его действительно должно было рассматривать, как решающий эстетический момент. Для этого очевидно необходимо отдельно рассмотреть длины, входящие в состав золотого сечения. Это значит, что сравниваемые промежутки или расстояния должны быть совершенно однородны, не должно быть никаких признаков, по которым бы они с самого начала качественно отличались друг от друга. Когда мы сравниваем ширину рамы картины с величиной картины, то невозможно не принимать во внимание качественной особенности рамы. Когда мы сравниваем высоту цоколя какого-нибудь памятника с высотой поставленной на него статуи, то тоже совершенно нельзя думать, что мы при этом не принимаем во внимание качественного своеобразия цоколя по сравнению со статуей. В таких случаях мы не можем говорить о непосредственном эстетическом воздействии определенного отношения двух пространственных величин.

Золотое сечение может явиться перед нами только двумя способами, так, чтобы мы могли его оценить в чистом виде. В первом — оба рассматриваемые расстояния совпадают по направлению. Тогда мы должны себе представить, скажем, что расстояние между двумя параллельными линиями разделено третьей параллелью в отношении золотого сечения. Во втором — оба сравниваемые расстояния представляют собою два измерения плоскости. Они являются длинами сторон плоского прямоугольника (или также двумя осями эллипса).

Вопрос в том, можем ли мы в этих случаях утверждать, что отношение золотого сечения производит приятное впечатление? На этот вопрос безусловно следует ответить утвердительно. Мы должны только остерегаться того, чтобы в этом утвердительном ответе на поставленный вопрос не видеть больше того, что в нем заключается.

Его прежде всего нельзя понимать в том смысле, что золотое сечение есть единственное отношение, которое производит приятное впечатление, и поэтому отнюдь нельзя считать, что приятное эстетическое впечатление есть особое отличительное свойство золотого сечения. В действительности мы можем установить, что при делении одного только измерения (например, при делении полосы на части, попеременно выкрашенные различными цветами) благоприятное впечатление производят отношения, совершенно отличные от отношения золотого сечения, и прежде всего — отношение равенства.

Для картин с ясно изображенным горизонтом, у которых действительно расстояние двух параллельных линий, а именно верхнего и нижнего края картины, должно быть разделено третьей параллелью — горизонтом, с давних пор установлено правило, что это деление должно производиться по золотому сечению. Но если уже в древнем искусстве оно никоим образом не наблюдается, как общее правило, и даже не может быть установлено с отдаленным приближением, то с появлением реализма в середине прошлого века прямо-таки намеренно искали отступлений от него. Французские импрессионисты намеренно рисовали горизонт или близко к верхнему краю картины, или непосредственно над нижним краем, чтобы показать, что выбор высоты горизонта зависит от особых условий, а не от общего правила. Картина есть изображение части действительности, и границы ее прежде всего совершенно произвольны. Подобно тому, как нет основания для того, чтобы какой-нибудь изображенный на картине предмет, в том числе и человеческая фигура, не пересекался краем картины, точно также нет основания считать необходимым или даже только предпочитать определенное положение горизонта, т. е. определенные расстояния верхнего и нижнего краев картины от высоты глаза.

Если, несмотря на это, пытаться придерживаться этого правила, то следует исходить из того, что картина, согласно такому взгляду, не есть произвольно выделенная часть природы, а есть произведение само по себе, независимо от его отношения к действительности, искусственная композиция на плоскости. Возьмем, например, совсем простой случай – картину, на которой изображены только море и небо, отделенные друг от друга прямой линией горизонта. Тогда на картине окажется две массы, море и небо, которые должны быть отделены друг от друга. При этом одно (море или небо) должно перевешивать, потому что видовое различие между ними влечет за собой подчеркивание одной или другой части, так как внутреннее несходство и внешнее подобие изображаемых поверхностей производит неприятное впечатление, как нечто неестественное, нарушающее равновесие. Одному из двух – морю или небу – следует отдать предпочтение, но избегая преувеличения. Не следует совершенно пренебрегать одним ради другого. Это ведет к поискам среднего пути между равенством и преувеличенным различием.

Но почему при таком выборе высот выбирают именно отношение золотого сечения? Если вообще существует объяснение этого, то оно может только заключаться в следующем. Мы должны себя спросить: как вообще совершается сравнение обеих частей. Во всяком случае таким образом, что глаз как бы представляет себе меньшее расстояние отложенным циркулем на большем расстоянии. Мы будем себя чувствовать неудовлетворенными в тех двух случаях, когда остающееся расстояние либо мало по сравнению с отложенным, либо слишком велико, может быть приблизительно такой же величины. Если же первоначальное отношение обеих частей мы снова находим между отложенной на большей меньшей частью и остатком так же, как это имеет место при золотом сечении, то мы ощущаем некоторое спокойствие и уверенность, получаем впечатление чего-то закрепленного в самом себе (рис. 12).

Аналогичным образом можно было бы, пожалуй, объяснить, что прямоугольник, отношение сторон которого соответствует отношению золотого сечения, производит наиболее приятное впечатление. Для сравнения длины обеих сторон нужно представить себе,

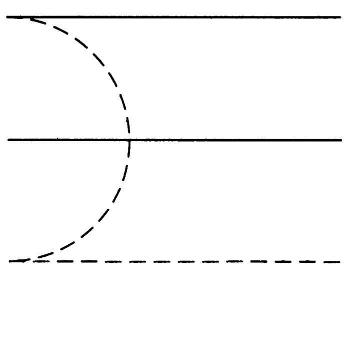


Рис. 12. Отношение меньшего расстояния к большему расстоянию совпадает с отношением оставшегося расстояния к меньшему расстоянию (случай золотого сечения)

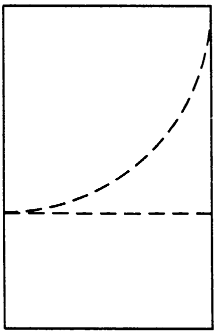


Рис. 13. Прямоугольник, отношение сторон которого соответствует отношению золотого сечения, производит наиболее эстетическое впечатление

что меньшая сторона отложена на большей, и тогда снова сравнивать остаток с меньшей стороной (рис. 13). Если при этом повторяется первоначальное отношение, мы опять получим спокойное и уверенное впечатление чего-то, при различии сохраняющего подобие с самим собой, на чем вообще, согласно Гогарту (Hogarth), основано всякое эстетическое впечатление. Вообще стремление к различию имеет причину, аналогичную той, которая имеется при делении картины горизонтом. Стороны прямоугольника имеют различную значимость, и это должно найти свое выражение в их размерах. Возьмем, например, книгу. В этом случае корешок наперед выделяется по сравнению с обрезом и по большей части должен быть сильнее оттенен. То же мы видим и в прямоугольном ящике, по отношению к той стороне, которая прикреплена к шарниру.

У картинной рамы вертикальные и горизонтальные стороны сообразно с их различным значением требуют различного оттенения. Там, где все стороны совершенно однородны, как, например, у дощечек паркетного пола или у печных кафелей, обыкновенно предпочитается также квадратная форма.

Но наверное при случае выбираются также отношения, совершенно отличные отношения золотого сечения, они так входят в употребление, что совершенно оттесняют золотое сечение. Но это вовсе не может служить доводом против того, чтобы все-таки считать золотое сечение предпочтительным перед всеми. Нет такого могучего эстетического впечатления, которое не могло бы быть вытеснено модой. В моде на одежду это является совершенно обычным явлением. Почти каждая мода на одежду сначала воспринимается всеми, как некрасивая, а после того, как она получила распространение, как единственно удовлетворяющая. Но, с другой стороны, именно господствующее влияние привычки вызывает подозрение, что это тоже только привычка заставляет нас придерживаться золотого сечения, после того как оно было принято на основании теоретических соображений, но которые сами по себе чужды эстетике.

В действительности, привычка должна быть очень сильной, потому что бесчисленное множество окружающих нас предметов обнаруживает своими размерами отношение золотого сечения. Так обстоит дело с листами, на которых я писал эти рассуждения, а также с листами, на которых они напечатаны.

Форматам книг, цветным картинам, входным билетам, бумажникам, аспидным доскам, сундукам, ящикам, шкатулкам, шоколадным плиткам, пряникам и всевозможным другим предметам, частью сознательно, частью бессознательно, придается форма согласно основному принципу золотого сечения. Привычка к золотому сечению, без сомнения, имеется налицо, и путем опытов нельзя решить, какое впечатление это отношение производит на непосредственных людей, так как нужно было бы производить опыты с грудными младенцами или с ботокудами. Производя опыт над некоторым числом лиц, мы можем прежде всего ожидать, что при выборе прямоугольных форм золотому сечению будет отдано предпочтение. Но при этом важно установить, насколько это предпочтение велико, определенно и отчетливо. Выполнение этого является заслугой **Г. Г. Фехнера** (1876) [3].

Он показывал ряду испытуемых лиц 10 прямоугольников с определенным отношением сторон и заставил их выбирать такой прямоугольник, который больше всего их удовлетворял. Результаты, которые он получил, приведены в табл. 1. В ней применены

---

[3] *Fechner G. Th.* Vorschule der Ästhetik. I. 2. A. 1897. S. 190. Опыты были произведены **Витмером** (Witmer, 1894) и **Сегалем** (Segal, 1906).

Таблица 1

О	*Ч*		*ч*		*Ч* в процентах	
	м.	*ж.*	*м.*	*ж.*	*м.*	*ж.*
$\frac{1}{1}$	6,25	4,0	36,67	31,5	2,74	3,26
$\frac{6}{5}$	0,5	0,33	28,8	19,5	0,22	0,27
$\frac{5}{4}$	7,0	0,0	14,5	8,5	3,07	0,00
$\frac{3}{4}$	4,5	4,0	5,0	1,0	1,97	3,66
$\frac{29}{20}$	13,33	13,5	2,0	1,0	5,85	11,35
$\frac{3}{2}$	50,91	20,5	1,0	0,0	22,33	17,22
$\frac{34}{21}$	78,66	42,65	0,0	0,0	34,50	35,83
$\frac{23}{13}$	49,33	20,21	1,0	1,0	21,64	16,99
$\frac{2}{1}$	14,25	11,83	3,83	2,25	6,25	9,94
$\frac{5}{2}$	3,25	2,0	57,21	30,25	1,43	1,68
	228	119	150	95	100,00	100,00

следующие сокращения: *О* — отношение сторон, *Ч* — число благоприятных отзывов, *ч* — число неблагоприятных отзывов, *м.* — лица мужского пола, *ж.* — лица женского пола.

Первое отношение 1 : 1 дает нам квадрат. Отношение 34 : 21 представляет с достаточной точностью отношение золотого сечения. Удивительным образом оба прямоугольника, соседние с этим, дают приблизительно одинаковые числа; автор, как он сам сознается, не был в состоянии дать этому объяснение. Результаты опыта сами по себе чрезвычайно благоприятны для золотого сечения. Оно действительно является нормой, к которой стремится общее восприятие. То, что сравнительно многими лицами был выбран квадрат, не существенно. Фехнер сам говорит про некоторых лиц, что они, по собственному признанию, отдали предпочтение квадрату по рассудочным соображениям, потому что квадрат является самой правильной фигурой.

В тех конкретных случаях, где появляется вопрос о золотом сечении, и где, как мы уже сказали, одно измерение должно отличаться от другого, весьма вероятно, что эти лица не высказались бы за равенство обоих измерений.

Фехнер делает еще следующие отдельные замечания к исследованиям: «Только в очень немногих случаях было отказано в суждении, но также только в очень немногих случаях, хотя некоторые таковые все же имелись, суждение было определенное и решительное. Большей частью имело место длительное колебание, и иногда, остановившись уже на каком-нибудь прямоугольнике, при том же самом опыте, поправляя себя, отдавали предпочтение другому, или же продолжали до конца колебаться между двумя, тремя или даже четырьмя прямоугольниками. Когда опыт производился с теми же лицами в другое время, после того как впечатление прежнего уже изгладилось, нередко вместо прямоугольника, выбранного при прежнем опыте, отдавали предпочтение другому соседнему с ним. Несмотря на эту неуверенность в отдельных случаях, табл. 1 дает все-таки в общем совершенно определенные результаты».

Именно эта неуверенность при выборе, которую отмечает Фехнер, почти дает нам возможность заключить, что мы сами по себе не склонны отдавать предпочтение отношению, которое дает нам золотое сечение. Гораздо более правдоподобным является предположение, что золотому сечению первоначально было отдано предпочтение по рассудочным соображениям. Но вследствие того, что это отношение потом было избрано нормой для бесчисленного множества употребляемых форм, и что его приближения, естественно получающиеся путем выбора удобных близких числовых отношений, в общем и целом снова выдвигаются, оно, в конце концов, так утвердилось в представлении, что даже бессознательный выбор отношения размеров тоже тяготеет к нему. Но уверенности в этом вопросе во всяком случае очень трудно достигнуть. Мы должны все же считаться с возможностью того, что тяготение к золотому сечению происходит благодаря нашей внутренней склонности.

Два обстоятельства должны быть во всяком случае приняты во внимание. Первое состоит в следующем: при выборе золотого сечения мы должны иметь в виду только такие случаи, когда оба сравниваемые измерения одинаковым образом оцениваются. Если одна и та же длина в одном измерении кажется больше, чем в другом, то отношение золотого сечения должно потерять всякое значение. Это сразу же чрезвычайно ограничивает применение золотого сечения. Прежде всего, как известно, определенное разделение, например, штриховка рассматриваемой прямоугольной фигуры, меняет расценку измерений. Известный оптический обман заключается в том, что горизонтально заштрихованный квадрат нам кажется иным, чем вертикально заштрихованный (см. рис. 14). Фасад здания, разделенный в вертикальном направлении приставленными колоннами, кажется нам иным, нежели фасад, разделенный в горизонтальном направлении выступающими карнизами. Это деление является важным моментом в искусстве, чтобы сообразно с ним оттенить в здании ширину — массивность, тяжеловес-

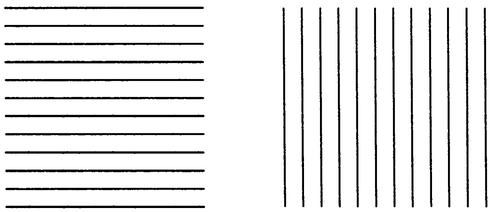


Рис. 14. Оптический обман: горизонтально заштрихованный квадрат нам кажется иным, чем вертикально заштрихованный

ность, или же вышину — легкость, стремление ввысь. Мы должны непременно принимать во внимание также субъективные оценки измерений при суждении об эстетическом воздействии их отношений.

Кроме того, известно, что вертикальные измерения сами по себе иначе оцениваются, чем горизонтальные. Отношение высоты здания к его ширине никогда не кажется нам таким же, как в начерченном плане фасада. В качестве примера такого случая, где одинаковая расценка обоих измерений прямоугольника не имеет места, и поэтому можно ждать отношений, значительно отличающихся от золотого сечения, мы выбираем результаты, которые получил **Фехнер**, сравнивая большое число картин из самых разнообразных собраний по их формату[4)].

Фехнер точно исследовал распределение частоты различных форматов. Мы ограничимся тем, что приведем средние значения для обоих различаемых родов

[4)] Vorschule der Ästetik. II. С. 273 и след.

Таблица 2

Место собрания	*ч*	*в* > *ш* среднее значение $\frac{в}{ш}$	*ч*	*ш* > *в* среднее значение $\frac{ш}{в}$
Дрезден	151	1,276	119	1,334
Мюнхен и Франфуркт	126	1,248	103	1,311
Петербург	122	1,236	87	1,337
Берлин	74	1,220	60	1,362
Париж	62	1,225	82	1,357
Брауншвейг, Дармштадт	57	1,243	58	1,322
Амстердам, Антверпен	48	1,241	24	1,332
Вена, Мадрид, Лондон	48	1,297	97	1,370
Лейпциг	48	1,287	34	1,315
Брюссель, Дижон, Венеция, Милан, Флоренция	39	1,226	38	1,345

Род картин	среднее значение $\frac{в}{ш}$ *в* > *ш*	среднее значение $\frac{ш}{в}$ *ш* > *в*
Жанры	1,250	1,338
Ландшафты	1,248	1,380
Идиллия	1,258	1,388

форматов картин – узкого и широкого, которые были получены у самых различных коллекций. Они сведены в табл. 2, в частности, для жанровых картин. При этом *в* обозначает высоту, *ш* – ширину и *ч* – число картин.

Как показывает таблица, получаются, по-видимому, по крайней мере с некоторым приближением, определенные нормальные значения, которые составляют для узкого формата приблизительно $1\frac{1}{4}$, а для широкого формата $1\frac{1}{8}$. Если мы тоже сравним различные роды картин, то получатся представленные в таблице средние значения отношений для всех собраний, вместе взятых.

Отношение меньшего измерения к большему все же значительно отличается от отношения золотого сечения (1,618), в особенности у узкого формата. Таким образом, мы не можем сказать, что в этом случае эстетическое чувство тоже влечет нас к золотому сечению, мы скорее должны считать, что особенность характера картины влияет на выбор формата. Мы не имеем здесь перед собой равномерно заполненных прямоугольников; задача картинного изображения, с одной стороны, и чисто декоративное воздействие окрашенных поверхностей, с другой стороны, обусловливают здесь предпочтение другого отношения измерений. Все-таки поражает то, что для него и здесь, по-видимому, устанавливается твердое нормальное значение.

Второе обстоятельство, с которым мы должны считаться при эстетической оценке золотого сечения, есть следующее: Трудно было бы доказать утверждение, что только тогда получается приятное впечатление, когда мы имеем перед глазами совершенно точное отношение золотого сечения. Ведь наше наблюдение недостаточно тонко, и сравнение двух длин по глазомеру недостаточно достоверно для того, чтобы маленькое отклонение могло быть тотчас же нами замечено. Как бы решение ни было благоприятно для золотого сечения, мы можем, даже в лучших случаях, эстетическое воздействие приписать только некоторой более или менее узкой области значений отношения и про значения в этой области сказать, что они группируются вокруг золотого сечения.

Следующее простое соображение может это еще лучше разъяснить: если мы имеем перед собой прямоугольную картину в раме, то может явиться вопрос, какое отношение на нее действует, отношение ли сторон вставленной в раму картины, или отношение наружных краев рамы. Но если одно из них есть отношение золотого сечения, то другое наверное не может быть им. Если мы предположим формат картины равным 40 на 70 см, тогда рама в 5 см ширины будет еще сравнительно очень узкой. Но при этом измерения картины вместе с рамой будут 50 на 80 см, т. е. отношение их приблизительно соответствует золотому

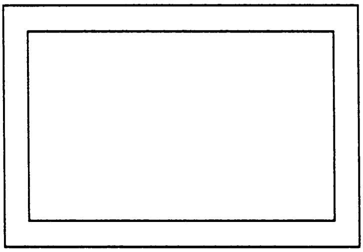


Рис. 15. Картина в рамке. Если одно из отношений сторон равно отношению золотого сечения, то другое наверное нет

сечению, тогда как сама картина дает другое отношение 4 : 7 (рис. 15).

Отношение, лишь немного отличающееся от золотого сечения, мы не можем так, без дальнейших оговорок, признать в эстетическом отношении мало пригодным. В действительности золотое сечение имело, как мы уже раньше отмечали, настоящим соперником другое отношение, а именно отношение $1 : \sqrt{3}$ или приблизительно 4 : 7, которое осуществляется катетами прямоугольного треугольника, когда один катет равен половине гипотенузы. Это отношение применяется именно на такой ступени культуры, при которой искусство геометрических построений еще не вполне развито, потому что его легче получить, чем отношение золотого сечения. Но, можете быть, это все-таки не было причиной, обусловливающей его предпочтение. Правдоподобнее даже, что эта причина заключалась в его связи с равносторонним треугольником. Равносторонний треугольник был, по-видимому вавилонянами, признан основной фигурой. Эвклидовы элементы начинаются с него, а в искусстве рисования средних веков, заимствовавшем технико-геометрические знания древнего мира, которые из Вавилона через Малую Азию проложили себе путь в Грецию и там непосредственно продолжали развиваться, — в этом искусстве господствовало до эпохи Леонардо да Винчи и Дюрера стремление все построения по возможности сводить к построению равностороннего треугольника.

Пользование равносторонним треугольником и отношениями, получающимися из него, в античном и средневековом зодчестве стало предметом двух исследований одного из наших значительнейших историков искусства Г. Дегио (G. Dehio)[5]. Эти исследования исчерпывающе ответили на вопрос. Правда, в отдельных случаях может возникнуть сомнение в том, действительно ли так применялось построение с помощью равностороннего треугольника в чертеже постройки, как указывает автор. Но в общем и целом нельзя сомневаться в том, что здесь действительно имеется закон пропорций, что подтверждается так-

[5] Untersuchungen über das gleichseitige Dreieck als Norm gotischer Bauproportionen. Stuttgart, 1894; Ein Proportionsgesetz der antiken Baukunst und sein Nachleben im Mittelalfer un din Renaissance. Strassburg, 1895.

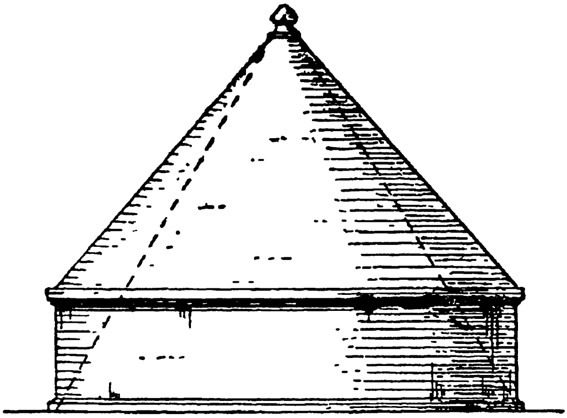


Рис. 16. Гробница Тантала во Фригии

же историческими свидетельствами. Из многочисленных примеров, которые дает нам Дегио, мы выберем лишь немногие, наиболее показательные. Остановимся на гробнице Тантала во Фригии (рис. 16). С внешней стороны гробница имеет форму конуса, поставленного на цилиндр. Когда делался чертеж, на диаметре основания рисовался равносторонний треугольник, достигающий верхушки. Затем, как предполагают, вся высота, исключая верхушку, делилась на три части, и одна часть служила высотой цилиндрического основания. В цилиндрическом склепе мы снова находим точный равносторонний треугольник (рис. 17).

Из дальнейших примеров мы возьмем еще фригийскую гробницу (рис. 18) и рыночные ворота в Афинах, которые легко непосредственно сравнить

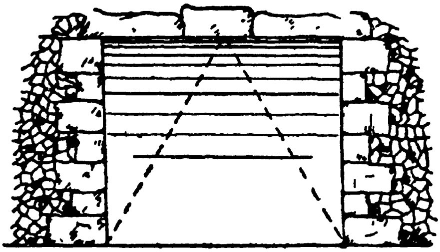


Рис. 17. В цилиндрическом склепе мы снова находим точный равносторонний треугольник

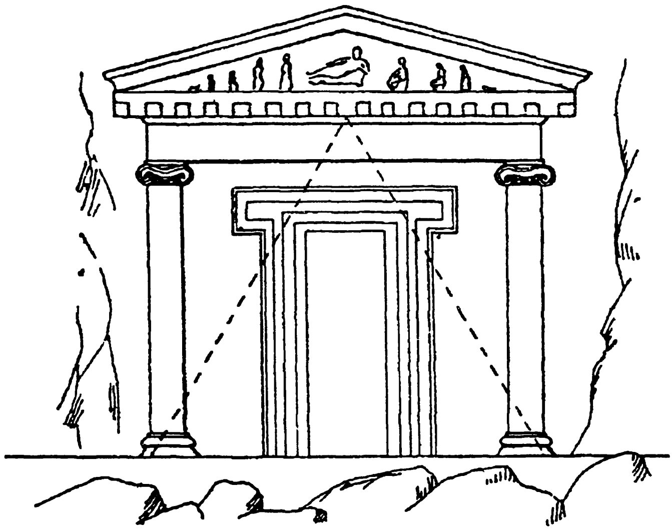


Рис. 18. Фригийская гробница

с нею (рис. 19). Как раз фригийские примеры могут указать нам тот путь, по которому совершился переход из Вавилона в Грецию.

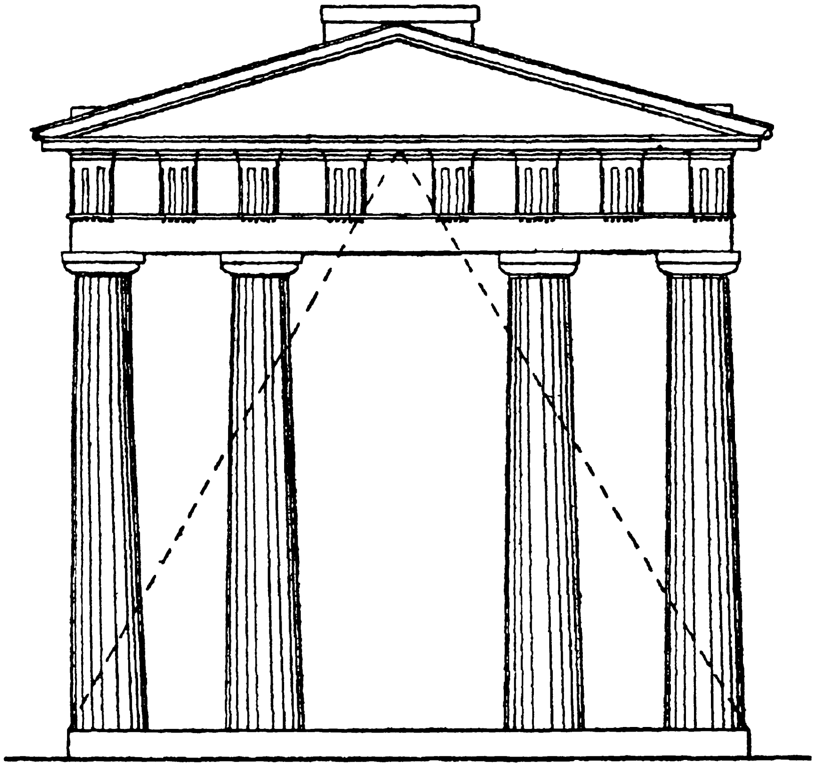


Рис. 19. Рыночные ворота в Афинах

При рассмотрении арки афинской площади у нас может явиться желание поискать также отношения золотого сечения, и именно в расстояниях между колоннами. Но, независимо от неопределенности, возникающей при вопросе о том, следует ли сравнивать промежутки между колоннами или же расстояния между их осями, именно этот пример с первого взгляда показывает, что колонны естественным образом располагаются соответственно ряду триглифов и метоп, так что здесь, как и вообще в очень многих случаях, органическая связь отдельных частей строения обусловливает обнаруживающиеся отношения.

Но там, где отношения остаются произвольными, в наши дни архитектор выбирает их, руководствуясь исключительно художественным чутьем, и радуется предоставляемой ему свободе. Прежний зодчий во всяком случае не относился к этой свободе, как к благодеянию, он не чувствовал себя вправе ею пользоваться и искал твердых правил, которыми бы он мог этот произвол устранить; эти правила заключались или в геометрических построениях, или же в определенно установленных числовых отношениях. Сюда примешивалось еще мистическое религиозное чувство. Эти правила и их ненарушимость считались отображением божественного порядка. Им приписывалась также чудодейственная сила. Например, у египтян, так же как у вавилонян, соотношения размеров в храмах имеют священный смысл.

Этот серьезный и глубокий взгляд на пропорции у нас свелся к светскому толкованию, что все правила, устанавливающие размеры, служат лишь для того, чтобы с самого начала обеспечить приятное зрительное впечатление. Во всяком случае, с этой целью часто прибегают к тем числовым отношениям, которые служат рациональными приближенными значениями для иррационального отношения золотого сечения. Но следует принять во внимание, что это само по себе еще не указывает на применение самого золотого сечения; например, если при этом чаще всего появляется отношение 3 : 5, то еще неизвестно, следует ли его рассматривать как приближенное значение для отношения золотого сечения, или для отношения катетов прямоугольного треугольника, представляющего половину равностороннего треугольника. Лишь отношение 5 : 8 можно уже с уверенностью отнести к золотому сечению. Хорошим примером применения этого приближенного значения может служить разделение высоты в урне стиля «барокко» в Салемском соборе. Высота самого сосуда равна 8, ножка и крышка имеют высоту 5 и украшение на крышке – высоту 3. Таким образом высота всей крышки равняется высоте самого сосуда и относится к высоте сосуда вместе с ножкой, как 8 : 13, что составляет следующее по точности приближенное значение золотого сечения. Это соотношение производит чрезвычайно благоприятное впечатление (ср.: *Pfeifer Herm.* Die Formenlehre des Ornaments; Ersten Teiles 3. Band, Stuttgart, 1906. S. 116).

Тем не менее, нельзя переоценивать значение для архитектуры отношения золотого сечения и его приближений. Применение этого отношения является только частным случаем общего правила, а именно правила повторения одного и того же отношения в отдельных частях. Уже **Витрувий** в своем сочинении о строительном искусстве обращает внимание на это общее правило, как на самую сущность всей античной архитектуры. Его называли греческим словом «симметрия», которому мы теперь придаем другой смысл. Витрувий говорит (III, гл. 1), что учением о симметрии архитекторы должны были владеть в совершенстве. Но симметрия происходит от пропорции, которая по-гречески называется «аналогией». Пропорция означала при этом «согласованность соответствующих частей постройки между собой и с целым». Аналогичные мысли высказывает он и в другом месте (I, гл. 2). При этом несомненно имеется в виду, что при построении отдельных частей пользуются одним и тем же отношением, обнаруживающимся у целого.

Применение этого принципа мы опять можем себе уяснить на тех двух случаях, которые появляются при рассмотрении простейших геометрических расположений. В первом случае сравниваемые измерения располагаются друг за другом в одном и том же направлении, в другом случае они составляют каждый раз стороны прямоугольника. В первом случае повторение одного и того же отношения означает, что части являются членами геометрической прогрессии. Таким образом, если отношение второй части к первой составляет $q : 1$, и величина первой части равна а, то величины отдельных частей последовательно равны

$$a,\ qa,\ q^2a,\ q^3a \quad \text{и т.д.}$$

Для этого имеются следующие очень простые геометрические построения: пусть AB есть отрезок a, BC — отрезок qa, затем из A восставляется к AB перпендикуляр AA_1, так что $AA_1 = AB$, точно также из B — перпендикуляр BB_1, $BB_1 = BC$, и A_1 соединяется прямой линией с B_1. Тогда отрезок CC_1, отсекаемый этой прямой от перпендикуляра в точке C, равен q^2a.

Продолжая так далее, можно таким способом получить всю геометрическую прогрессию (рис. 20).

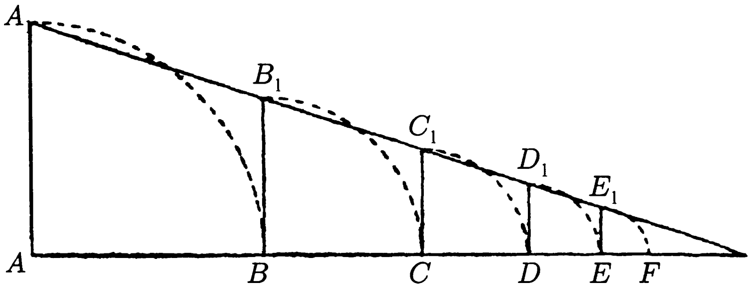


Рис. 20

Из общего выражения геометрической прогрессии можно получить прогрессию золотого сечения

$$a,\ xa,\ x^2a,\ x^3a \quad \text{и т.д.,}$$

если ввести условие, что первый член, а вследствие этого и каждый другой, равен сумме двух последующих членов. Это условие будет выполнено, если $1 = x + x^2$. Таким образом, золотое сечение появляется, если желают две одна за другою идущие равные части, путем дальнейшего подразделения одной из них, превратить в геометрическую прогрессию и тем к впечатлению от деления на равные части присоединить впечатление от непрерывного деления (т. е. деления на части, составляющие непрерывную пропорцию).

Повторение одного и того же отношения у сторон различных прямоугольников, представляющее собою второй род появления отношения в чистом виде, означает, что эти прямоугольники подобны. Но в архитектуре прямоугольники по большей части располагаются соответственно двум взаимно-перпендикулярным направлениям, а именно: одна сторона — горизонтальная, а другая — вертикальная. Но тогда и соответственно взятые диагонали обоих прямоугольников либо параллельны, либо перпендикулярны друг к другу. В первом случае оба прямоугольника расположены одинаково, во втором — один из них как бы поставлен, а другой положен (рис. 21).

Мы здесь не можем проследить, как эта соразмерность проходит сквозь всю архитектуру. Читатель найдет это коротко и ясно изложенным в сочинении известного архитектора **Августа Тирша** (*Thiersch August.* Die Proportionen in der Architektur; Handbuch der Architektur, Vierten Teiles 1. Halbband, Darmstadt,

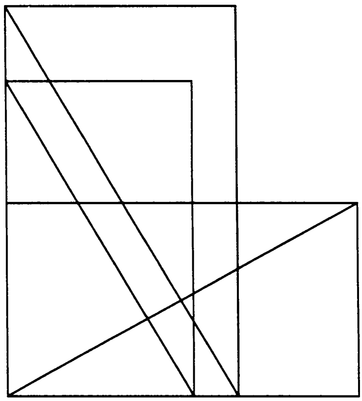


Рис. 21

1893). Можно взять еще для сравнения другой том того же самого собрания сочинений, принадлежащий Герм. Пфейферу (*Pfeifer Herm.* Die Formenlehre des Ornaments; Ersten Teiles 3. Band, Stuttgart, 1906). В то время как Тирш почти не обращает внимания на золотое сечение, Пфейфер по отношению к нему более благоприятно настроен[6]. Он находит его воплощение во многих местах и видит в этом ценное средство для достижения красивого и приятного впечатления.

Без сомнения, золотое сечение, в этом ограниченном толковании его значения, как дающего хорошее и приятное соотношение измерений или частей друг к другу, сохраняет постоянно ценность, которую

[6] См. также *Matthias.* Die Regel vom Goldenen Schnitt im Kunst gewerbe. Leipzig, 1886.

не следует преуменьшать. С другой же стороны, мы должны остерегаться мистического толкования этого отношения, которое не требуется для понимания действительных законов искусства и психологических условий художественных впечатлений, а лишь препятствует правильному пониманию этих условий и направляет на ложный путь, вследствие необоснованного введения метафизического элемента.

В книге немецкого ученого Г. Е. Тимердинга, профессора высшей технической школы в Брауншвейге, рассматривается золотое сечение — как с точки зрения математики, так и с точки зрения эстетики. В первой части книги изложены в связной и законченной форме те соображения из области элементарной математики, которые относятся к золотому сечению. Во второй части подвергнуто критическому исследованию то значение, которое имеет золотое сечение в эстетике. Первое издание на русском языке вышло в 1924 году, но вопросы, поднятые в книге, не оставят равнодушными и современных читателей.